

欧几里得算法的应用

金斌

江苏省常州高级中学

2009 年 1 月

总览

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

论文内容

- 1 欧几里得算法—辗转相除
- 2 拓展欧几里得算法—模线性方程（组）
- 3 另类欧几里得算法
- 4 连分数与Pell方程
- 5 例题—WifiPlanet(TOPCODER SRM 410 HARD)

总览

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

论文内容

- 1 欧几里得算法—辗转相除
- 2 拓展欧几里得算法—模线性方程（组）
- 3 另类欧几里得算法
- 4 连分数与Pell方程
- 5 例题—WifiPlanet(TOPCODER SRM 410 HARD)

总览

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

论文内容

- 1 欧几里得算法—辗转相除
- 2 拓展欧几里得算法—模线性方程（组）
- 3 另类欧几里得算法
- 4 连分数与Pell方程
- 5 例题—WifiPlanet(TOPCODER SRM 410 HARD)

总览

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

论文内容

- 1 欧几里得算法—辗转相除
- 2 拓展欧几里得算法—模线性方程（组）
- 3 另类欧几里得算法
- 4 连分数与Pell方程
- 5 例题—WifiPlanet(TOPCODER SRM 410 HARD)

总览

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

论文内容

- 1 欧几里得算法—辗转相除
- 2 拓展欧几里得算法—模线性方程（组）
- 3 另类欧几里得算法
- 4 连分数与Pell方程
- 5 例题—WifiPlanet(TOPCODER SRM 410 HARD)

总览

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

论文内容

- 1 欧几里得算法—辗转相除
- 2 拓展欧几里得算法—模线性方程（组）
- 3 另类欧几里得算法
- 4 连分数与Pell方程
- 5 例题—WifiPlanet(TOPCODER SRM 410 HARD)

总览

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

论文内容

- 1 欧几里得算法—辗转相除
- 2 拓展欧几里得算法—模线性方程（组）
- 3 另类欧几里得算法—一道例题
- 4 连分数与Pell方程
- 5 例题—WifiPlanet(TOPCODER SRM 410 HARD)

辗转相除

伪代码

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

辗转相除

分析

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

由于是数论的最基本算法，所以这里我直接给出伪代码：

伪代码

Input: $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Output: the greatest common divisor of x and y

```
1: while  $y \neq 0$  do  
2:    $t \leftarrow x \bmod y$   
3:    $x \leftarrow y$   
4:    $y \leftarrow t$   
5: end while  
6: return  $x$ 
```

辗转相除

伪代码

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

辗转相除

分析

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

由于是数论的最基本算法，所以这里我直接给出伪代码：

伪代码

Input: $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Output: the greatest common divisor of x and y

```
1: while  $y \neq 0$  do  
2:    $t \leftarrow x \bmod y$   
3:    $x \leftarrow y$   
4:    $y \leftarrow t$   
5: end while  
6: return  $x$ 
```

欧几里得算法

复杂度分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

辗转相除

分析

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

对于任意两个数 a, b 满足 $a > b > 0$, 我们考虑如下这个语句的效果

$$a \leftarrow a \bmod b \quad (1)$$

欧几里得算法

复杂度分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

辗转相除

分析

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

对于任意两个数 a, b 满足 $a > b > 0$, 我们考虑如下这个语句的效果

$$a \leftarrow a \bmod b \quad (1)$$

- 如果 $b \leq \frac{a}{2}$, 则 $a \bmod b < b \leq \frac{a}{2}$

欧几里得算法

复杂度分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

辗转相除

分析

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

对于任意两个数 a, b 满足 $a > b > 0$, 我们考虑如下这个语句的效果

$$a \leftarrow a \bmod b \quad (1)$$

- 如果 $b \leq \frac{a}{2}$, 则 $a \bmod b < b \leq \frac{a}{2}$
- 如果 $b > \frac{a}{2}$, 则 $a \bmod b \leq a - b < a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ 。

欧几里得算法

复杂度分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

辗转相除
分析

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

对于任意两个数 a, b 满足 $a > b > 0$ ，我们考虑如下这个语句的效果

$$a \leftarrow a \bmod b \quad (1)$$

- 如果 $b \leq \frac{a}{2}$ ，则 $a \bmod b < b \leq \frac{a}{2}$
- 如果 $b > \frac{a}{2}$ ，则 $a \bmod b \leq a - b < a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ 。

可以看出，每次操作(1)都会将 a 减半，所以最后复杂度是 $O(\log n)$ 。

另类欧几里得算法

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

容易想像，任何带“取模”操作并符合偏序的两个“数”都可以运用欧几里得算法，比如多项式。

另类欧几里得算法

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

容易想像，任何带“取模”操作并符合偏序的两个“数”都可以运用欧几里得算法，比如多项式。
而我们似乎可以做得更多，比如将取模放大到矩阵的初等变换，甚至是二维向量的操作。

二维欧几里得算法

题目

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

问题 (Maloyaroslavets Summer Camp 2008)

给出两个向量 a, b , 求整数 x, y 满足不同时为 0 , 使 $|ax + by|$ 最小。

二维欧几里得算法

题目

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

问题 (Maloyaroslavets Summer Camp 2008)

给出两个向量 a, b , 求整数 x, y 满足不同时为 0 , 使 $|ax + by|$ 最小。

为了方便讨论, 我们约定 $a \cdot b \geq 0$, 即 a 与 b 同向,
且 $|a| \leq |b|$ 。

二维欧几里得算法

题目

欧几里得算法的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

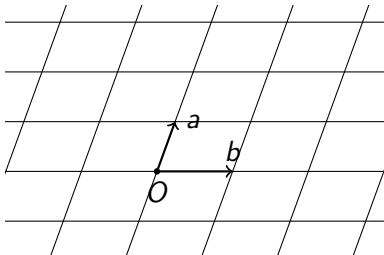
总结

感谢

问题 (Maloyaroslavets Summer Camp 2008)

给出两个向量 a, b , 求整数 x, y 满足不同时为 0 , 使 $|ax + by|$ 最小。

考虑如下一张图, 按 a 和 b 作为坐标轴画出一幅图, 很显然, 这道题目是要求该图中除了 O 之外的所有格点到 O 的最小值。



二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

觉得这样子过于简单了？

二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

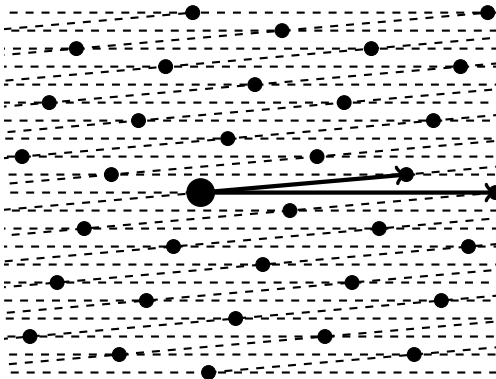
题目

WifiPlanet

总结

感谢

觉得这样子过于简单了？请看下图：



二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

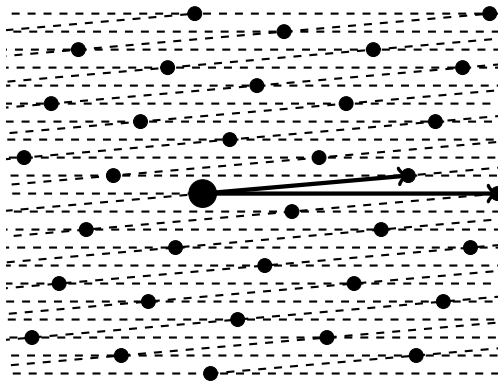
题目

WifiPlanet

总结

感谢

觉得这样子过于简单了？请看下图：



所以直观感受应该是，夹角越小问题越“不平凡”。

二维欧几里得算法

分析—Why Euclidean Algorithm??

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

观察一个很特殊的情况：就是 a 及 b 共线。很容易发现，最后的答案实际上就是 $\gcd(|a|, |b|)$ ，这启示我们，可能这道题目和欧几里得算法有关。

二维欧几里得算法

分析—Why Euclidean Algorithm??

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目
分析

WifiPlanet

总结

感谢

观察一个很特殊的情况：就是 a 及 b 共线。很容易发现，最后的答案实际上就是 $\gcd(|a|, |b|)$ ，这启示我们，可能这道题目和欧几里得算法有关。

进一步，考虑一个极端的情况，如下图，如果 a 与 b 的夹角很小，足以忽略不计，那么实际上答案还是 $\gcd(|a|, |b|)$ 。



所以至少本题的通解要包含普通欧几里得算法。

二维欧几里得算法

分析—两个结论

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

结论

如果 a, b 夹角大于 $\frac{\pi}{3}$, 则要求的答案就是 $\min(|a|, |b|)$ 。

二维欧几里得算法

分析—两个结论

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

结论

如果 a, b 夹角大于 $\frac{\pi}{3}$, 则要求的答案就是 $\min(|a|, |b|)$ 。

Proof.

令 $p = |a|$, $q = |b|$, 不妨设 $p \leq q$, 则

二维欧几里得算法

分析—两个结论

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

二维欧几里得

算法

开阔视野

题目

分析

感谢

总结

结论

如果 a, b 夹角大于 $\frac{\pi}{3}$, 则要求的答案就是 $\min(|a|, |b|)$ 。

Proof.

令 $p = |a|$, $q = |b|$, 不妨设 $p \leq q$, 则

$$\begin{aligned} |ax + by| &= \sqrt{(px)^2 + (qy)^2 - 2pxqy \cos \alpha} \\ &\geq \sqrt{|px|^2 + |qy|^2 - 2|px||qy| \cos \alpha} \\ &\geq \sqrt{|px|^2 + |qy|^2 - |px||qy|} \\ &\geq \sqrt{(|px| - |qy|)^2 + |px||qy|} \end{aligned}$$



二维欧几里得算法

分析—两个结论

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目
分析

WifiPlanet

总结

感谢

结论

如果 a, b 夹角大于 $\frac{\pi}{3}$, 则要求的答案就是 $\min(|a|, |b|)$ 。

Proof.

令 $p = |a|$, $q = |b|$, 不妨设 $p \leq q$, 则

$$|ax + by| \geq \sqrt{(|px| - |qy|)^2 + |px||qy|}$$

- 若 $x = 0$, 则 $y \neq 0$, $(|px| - |qy|)^2 = |qy|^2 \geq q^2 \geq p^2$
- 若 $y = 0$, 则 $x \neq 0$, $(|px| - |qy|)^2 = |px|^2 \geq p^2$
- 否则 $|px||qy| \geq |p||q| \geq p^2$ □

二维欧几里得算法

分析—两个结论

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目
分析

WifiPlanet

总结

感谢

结论

如果 a, b 夹角大于 $\frac{\pi}{3}$, 则要求的答案就是 $\min(|a|, |b|)$ 。

Proof.

令 $p = |a|$, $q = |b|$, 不妨设 $p \leq q$, 则

$$|ax + by| \geq \sqrt{(|px| - |qy|)^2 + |px||qy|}$$

- 若 $x = 0$, 则 $y \neq 0$, $(|px| - |qy|)^2 = |qy|^2 \geq q^2 \geq p^2$
- 若 $y = 0$, 则 $x \neq 0$, $(|px| - |qy|)^2 = |px|^2 \geq p^2$
- 否则 $|px||qy| \geq |p||q| \geq p^2$ □

二维欧几里得算法

分析—两个结论

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目
分析

WifiPlanet

总结

感谢

结论

如果 a, b 夹角大于 $\frac{\pi}{3}$, 则要求的答案就是 $\min(|a|, |b|)$ 。

Proof.

令 $p = |a|$, $q = |b|$, 不妨设 $p \leq q$, 则

$$|ax + by| \geq \sqrt{(|px| - |qy|)^2 + |px||qy|}$$

- 若 $x = 0$, 则 $y \neq 0$, $(|px| - |qy|)^2 = |qy|^2 \geq q^2 \geq p^2$
- 若 $y = 0$, 则 $x \neq 0$, $(|px| - |qy|)^2 = |px|^2 \geq p^2$
- 否则 $|px||qy| \geq |p||q| \geq p^2$ □

二维欧几里得算法

分析—两个结论

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

结论

(a, b) 所对应的解, 和 $(a, b + ka)$ 一致, 其中 k 为整数。

二维欧几里得算法

分析—两个结论

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

结论

(a, b) 所对应的解, 和 $(a, b + ka)$ 一致, 其中 k 为整数。

Proof.

- 令 $|ax + by|$ 为所求答案, 则 $|a(x - ky) + (b + ka)y|$ 也是, 即 (x, y) 对应着答案 $(x - ky, y)$ 。
- 并且若 $(x, y) \neq (0, 0)$, 则 $(x - ky, y) \neq (0, 0)$ 。
- 同理可证相反方向。 □

二维欧几里得算法

分析—两个结论

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

结论

(a, b) 所对应的解, 和 $(a, b + ka)$ 一致, 其中 k 为整数。

Proof.

- 令 $|ax + by|$ 为所求答案, 则 $|a(x - ky) + (b + ka)y|$ 也是, 即 (x, y) 对应着答案 $(x - ky, y)$ 。
- 并且若 $(x, y) \neq (0, 0)$, 则 $(x - ky, y) \neq (0, 0)$ 。
- 同理可证相反方向。 □

二维欧几里得算法

分析—两个结论

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

结论

(a, b) 所对应的解, 和 $(a, b + ka)$ 一致, 其中 k 为整数。

Proof.

- 令 $|ax + by|$ 为所求答案, 则 $|a(x - ky) + (b + ka)y|$ 也是, 即 (x, y) 对应着答案 $(x - ky, y)$ 。
- 并且若 $(x, y) \neq (0, 0)$, 则 $(x - ky, y) \neq (0, 0)$ 。
- 同理可证相反方向。 □

二维欧几里得算法

分析—两个结论

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

结论

(a, b) 所对应的解, 和 $(a, b + ka)$ 一致, 其中 k 为整数。

Proof.

- 令 $|ax + by|$ 为所求答案, 则 $|a(x - ky) + (b + ka)y|$ 也是, 即 (x, y) 对应着答案 $(x - ky, y)$ 。
- 并且若 $(x, y) \neq (0, 0)$, 则 $(x - ky, y) \neq (0, 0)$ 。
- 同理可证相反方向。 □

二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目
分析

WifiPlanet

总结

感谢

- 这两个结论直接告诉了我们欧几里得算法的终止“平凡情况”和变换方式（“取模”）
- 所以我们要做的就是，通过结论2不断扩大角度
- 但是我们还有很多细节考虑，比如 k 如何选取，如何保证有限步内结束？

二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

- 这两个结论直接告诉了我们欧几里得算法的终止“平凡情况”和变换方式（“取模”）
- 所以我们要做的就是，通过结论2不断扩大角度
- 但是我们还有很多细节考虑，比如 k 如何选取，如何保证有限步内结束？

二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开闭视野

题目
分析

WifiPlanet

总结

感谢

- 这两个结论直接告诉了我们欧几里得算法的终止“平凡情况”和变换方式（“取模”）
- 所以我们要做的就是，通过结论2不断扩大角度
- 但是我们还有很多细节考虑，比如 k 如何选取，如何保证有限步内结束？

二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

- 这两个结论直接告诉了我们欧几里得算法的终止“平凡情况”和变换方式（“取模”）
- 所以我们要做的就是，通过结论2不断扩大角度
- 但是我们还有很多细节考虑，比如 k 如何选取，如何保证有限步内结束？

二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

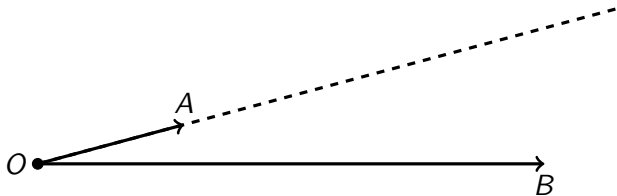
分析

WifiPlanet

总结

感谢

这里我们重申上面的约定, $|a| \leq |b|$ 。下面请看下图



二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

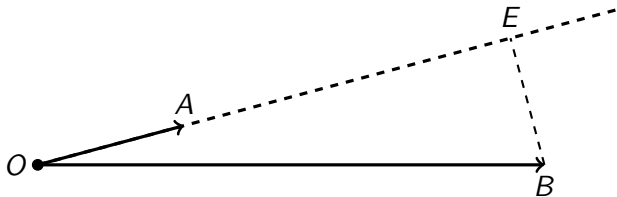
分析

WifiPlanet

总结

感谢

这里我们重申上面的约定, $|a| \leq |b|$ 。下面请看下图



如果此时 $|OA| > |OE|$, 则容易证明 $\angle OAB > \angle AOB$ (做A关于E的对称点A'易得)。

二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

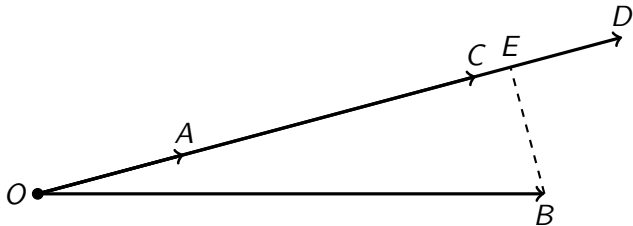
分析

WifiPlanet

总结

感谢

这里我们重申上面的约定, $|a| \leq |b|$ 。下面请看下图



二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

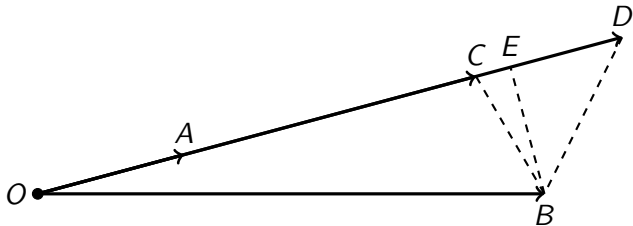
题目

WifiPlanet

总结

感谢

这里我们重申上面的约定, $|a| \leq |b|$ 。下面请看下图



二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

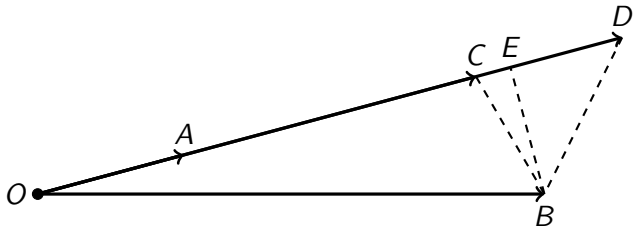
题目

WifiPlanet

总结

感谢

这里我们重申上面的约定, $|a| \leq |b|$ 。下面请看下图



如果 $|CE| < |DE|$, 则用 (CB, OA) 代替 (OA, OB) , 否则用 (DB, OA) 代替 (OA, OB) 。

二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

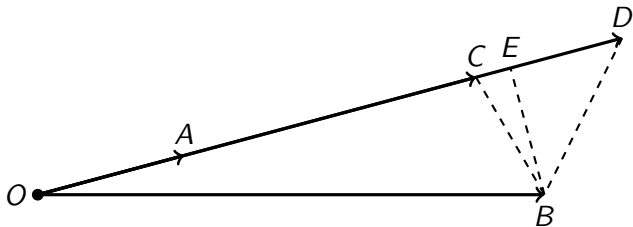
题目

WifiPlanet

总结

感谢

这里我们重申上面的约定, $|a| \leq |b|$ 。下面请看下图



结论

$$\max(\angle BCE, \angle BDE) > \angle AOB$$

Proof.

直接可以证明 $\angle DCB = \angle AOB + \angle CBO > \angle AOB$ 。 □

二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

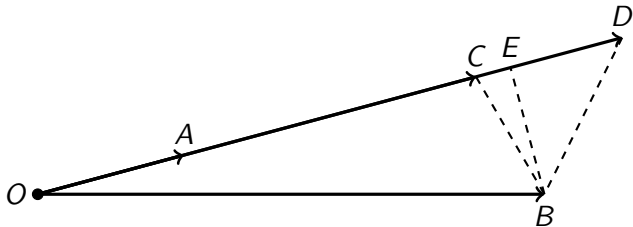
题目
分析

WifiPlanet

总结

感谢

这里我们重申上面的约定, $|a| \leq |b|$ 。下面请看下图



综上, 这种变换保持着向量夹角增加。

二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野
题目
分析

WifiPlanet

总结

感谢

所以一个基于欧几里得算法的算法就成型了，每次用二次函数计算上面的 k 值，之后进行变换，直到夹角超过 $\frac{\pi}{3}$ 。

二维欧几里得算法

分析

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

开阔视野

题目

分析

WifiPlanet

总结

感谢

所以一个基于欧几里得算法的算法就成型了，每次用二次函数计算上面的 k 值，之后进行变换，直到夹角超过 $\frac{\pi}{3}$ 。限于知识水平，这个算法的确切复杂度我不能给出，但是根据实验结果，基本能在几步之内结束，应该是 $O(\log C)$ 级别的。

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

题目

分析

欧几里得

总结

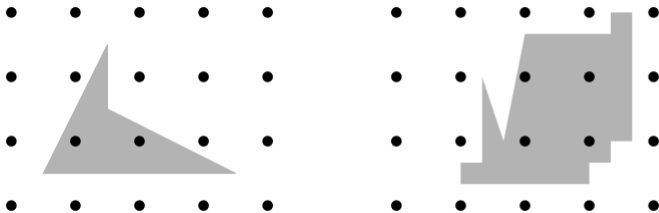
感谢

问题 (TopCoder SRM 410 HARD, writer: **bmerry**)

在整数格点的平面上有一个简单多边形（顶点坐标均为有理数），问其内部有多少格点。（题目保证不会有格点出现在边界上）

问题 (TopCoder SRM 410 HARD, writer: **bmerry**)

在整数格点的平面上有一个简单多边形（顶点坐标均为有理数），问其内部有多少格点。（题目保证不会有格点出现在边界上）



WifiPlanet

分析—梯形剖分

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

题目

分析

欧几里得

总结

感谢

- 三角剖分??
- 梯形剖分!!

WifiPlanet

分析—梯形剖分

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

题目

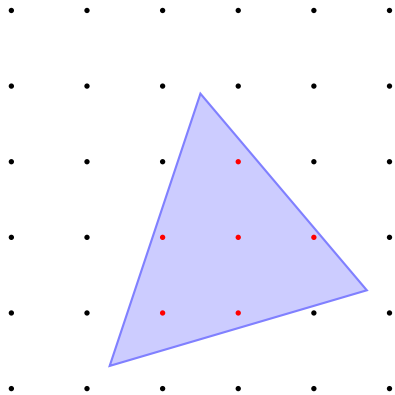
分析

欧几里得

总结

感谢

- 三角剖分??
- 梯形剖分!!



WifiPlanet

分析—梯形剖分

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

题目

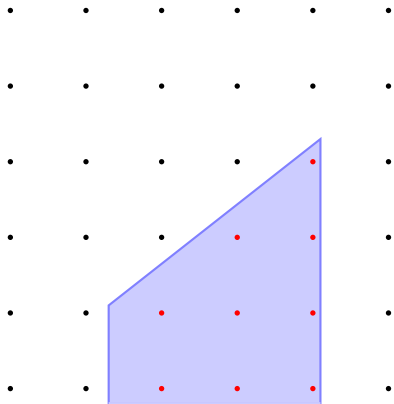
分析

欧几里得

总结

感谢

- 三角剖分??
- 梯形剖分!!



WifiPlanet

分析—梯形剖分

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

题目

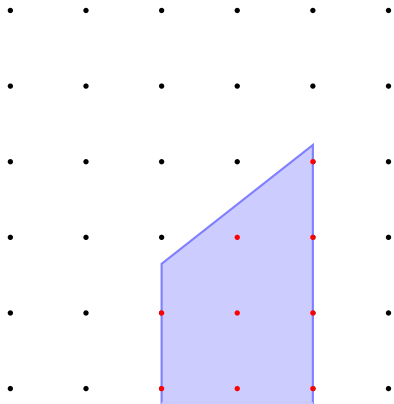
分析

欧几里得

总结

感谢

- 三角剖分??
- 梯形剖分!!



WifiPlanet

分析—梯形剖分

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

题目

分析

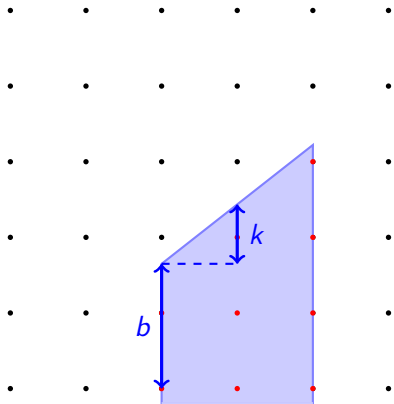
欧几里得

总结

感谢

- 三角剖分??
- 梯形剖分!!!

$$\sum_{i=0}^{n-1} [b + ki]$$



WifiPlanet

分析—梯形剖分

欧几里得算法的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

题目

分析

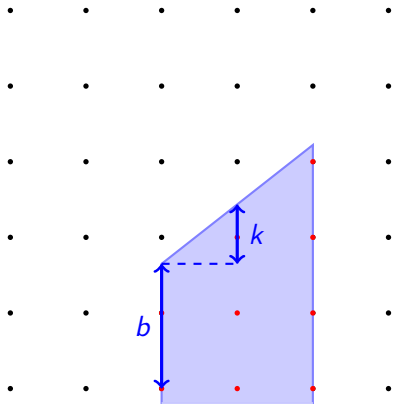
欧几里得

总结

感谢

- 三角剖分??
- 梯形剖分!!!

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a + di}{m} \right\rfloor$$



$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a + di}{m} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a + di}{m} \right\rfloor$$

约定：

- $0 \leq a < m$, 否则直接可以把 $\lfloor \frac{a}{m} \rfloor$ 提到外面。
- $0 < d < m$, 通过和上边式子一样的方法, 可以保证这一点。

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a + di}{m} \right\rfloor$$

约定：

- $0 \leq a < m$ ，否则直接可以把 $\lfloor \frac{a}{m} \rfloor$ 提到外面。
- $0 < d < m$ ，通过和上边式子一样的方法，可以保证这一点。

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a + di}{m} \right\rfloor$$

约定：

- $0 \leq a < m$, 否则直接可以把 $\lfloor \frac{a}{m} \rfloor$ 提到外面。
- $0 < d < m$, 通过和上边式子一样的方法, 可以保证这一点。

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a + di}{m} \right\rfloor$$

约定：

- $0 \leq b < 1$
- $0 < k < 1$

WifiPlanet

欧几里得算法-几何意义

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

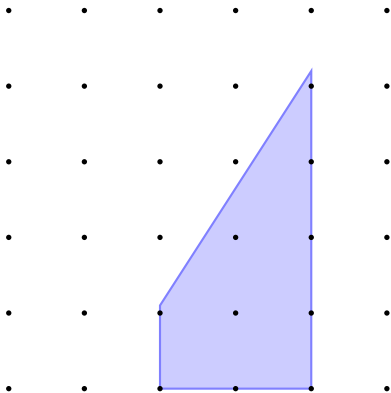
题目

分析

欧几里得

总结

感谢



WifiPlanet

欧几里得算法-几何意义

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

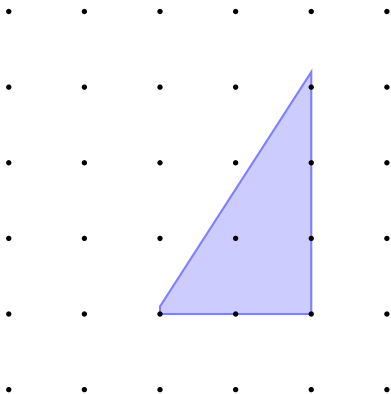
题目

分析

欧几里得

总结

感谢



WifiPlanet

欧几里得算法-几何意义

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

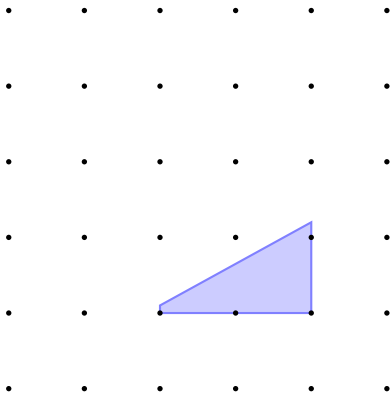
题目

分析

欧几里得

总结

感谢



WifiPlanet

欧几里得算法-几何意义

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

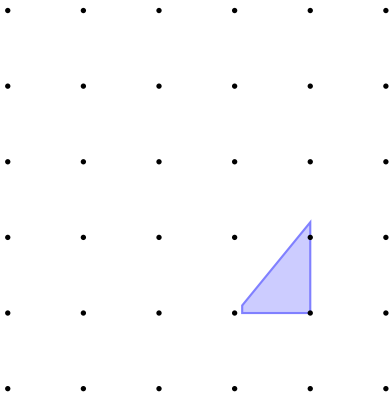
题目

分析

欧几里得

总结

感谢



WifiPlanet

欧几里得算法—交换边

欧几里得算法的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

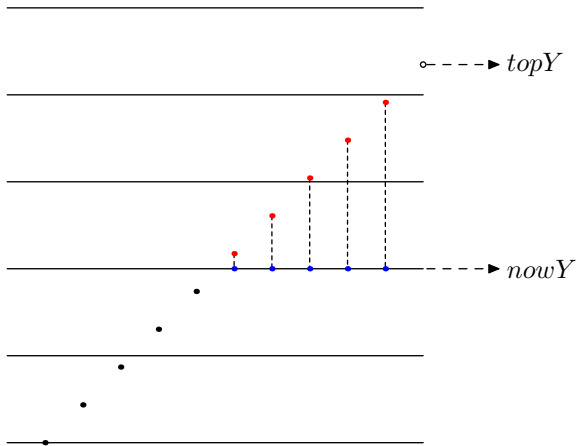
题目

分析

欧几里得

总结

感谢



WifiPlanet

欧几里得算法—交换边

欧几里得算法的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

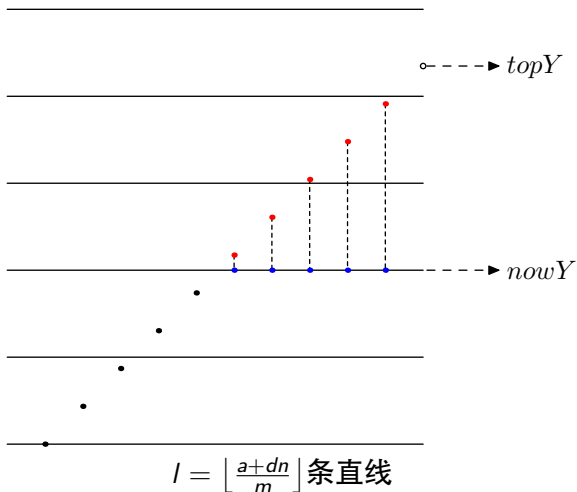
题目

分析

欧几里得

总结

感谢



WifiPlanet

欧几里得算法—交换边

欧几里得算法的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

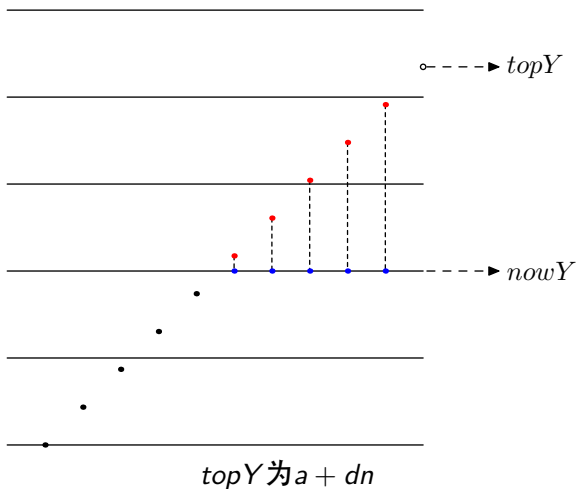
题目

分析

欧几里得

总结

感谢



WifiPlanet

欧几里得算法—交换边

欧几里得算法的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

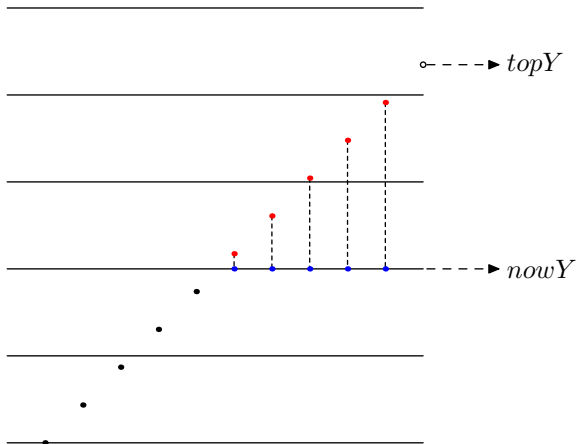
题目

分析

欧几里得

总结

感谢



$nowY$ 为当前的直线高度

WifiPlanet

欧几里得算法—交换边

欧几里得算法的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

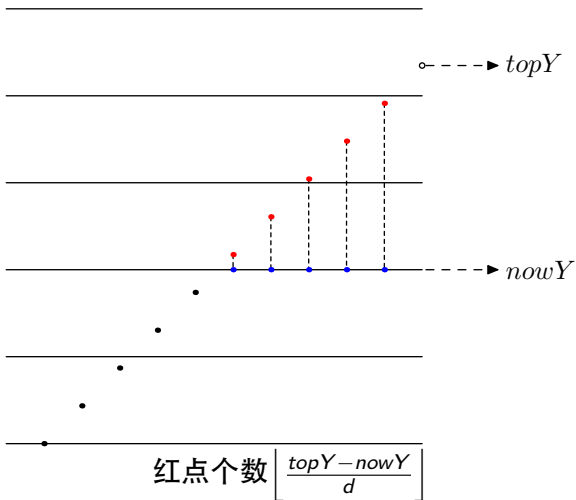
题目

分析

欧几里得

总结

感谢



$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a + di}{m} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{l-1} \left\lfloor \frac{(a + dn) \bmod m + mk}{d} \right\rfloor \quad (2)$$

问题至此解决

总结

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

欧几里得虽然被大部分信息学竞赛选手所熟知，但是在实际的运用中却很难被想到，实际上我们只要能挑出思维的定势，从一些并不相关的等式把问题简单化，最后都是能到达我们的目的的。本次论文主要从思想方面介绍了欧几里得算法的几个运用，可以算是一种开拓视野。而最后可以发现，所有的题目都是纯数学题，也能在一定程度上表明数学思想在计算机竞赛中的作用。

感谢

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

- 感谢我的老师常州中学的曹文老师，没有他就没有现在的我
- 感谢SPb IFMO的Vladislav Isenbaev(WiNGeR)提供题目，感谢上海交通大学的吴卓杰和中国科技大学的朱泓丞的帮助。
- 感谢大家的听讲

感谢

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

- 感谢我的老师常州中学的曹文老师，没有他就没有现在的我
- 感谢SPb IFMO的Vladislav Isenbaev(WiNGeR)提供题目，感谢上海交通大学的吴卓杰和中国科技大学的朱泓丞的帮助。
- 感谢大家的听讲

感谢

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

- 感谢我的老师常州中学的曹文老师，没有他就没有现在的我
- 感谢SPb IFMO的Vladislav Isenbaev(WiNGeR)提供题目，感谢上海交通大学的吴卓杰和中国科技大学的朱泓丞的帮助。
- 感谢大家的听讲

感谢

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

- 感谢我的老师常州中学的曹文老师，没有他就没有现在的我
- 感谢SPb IFMO的Vladislav Isenbaev(WiNGeR)提供题目，感谢上海交通大学的吴卓杰和中国科技大学的朱泓丞的帮助。
- 感谢大家的听讲

欧几里得算法
的应用

金斌

总览

欧几里得算法

二维欧几里得

WifiPlanet

总结

感谢

欢迎提问