矩阵乘法在信息学中的应用

浙江省杭州二中 俞华程

- 优化动态规划，加速模拟
- 图邻接矩阵上的乘法
- 矩阵乘法与折半递归

- 优化动态规划，加速模拟
- 图邻接矩阵上的乘法
- 矩阵乘法与折半递归

邻接矩阵的平方

考虑图邻接矩阵自乘，根据矩阵乘法的定义：

邻接矩阵的平方

考虑图邻接矩阵自乘，根据矩阵乘法的定义：

$$\mathbf{G}^2[a,b]=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{G}[a,i]\,\mathbf{G}[i,b]$$

邻接矩阵的平方

考虑图邻接矩阵自乘，根据矩阵乘法的定义：

$$\mathbf{G}^2[a,b] = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}[a,i]\,\mathbf{G}[i,b]$$

$\mathbf{G}[a,i]\,\mathbf{G}[i,b] = 1$当且仅当$\mathbf{G}[a,i] = \mathbf{G}[i,b] = 1$。

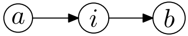
$$a \longrightarrow i \longrightarrow b$$

邻接矩阵的平方

考虑图邻接矩阵自乘，根据矩阵乘法的定义：

$$\mathbf{G}^2[a,b] = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}[a,i]\,\mathbf{G}[i,b]$$

$\mathbf{G}[a,i]\,\mathbf{G}[i,b] = 1$当且仅当$\mathbf{G}[a,i] = \mathbf{G}[i,b] = 1$。



a到b长度为2的路径条数。

邻接矩阵的立方

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{G}^3[a,b] \\
= & \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}[a,i]\,\mathbf{G}^2[i,b] \\
= & \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}[a,i]\left(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{G}[i,j]\,\mathbf{G}[j,b]\right) \\
= & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{G}[a,i]\,\mathbf{G}[i,j]\,\mathbf{G}[j,b]
\end{aligned}
$$

邻接矩阵的立方

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{G}^3[a, b] \\
= & \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}[a, i]\, \mathbf{G}^2[i, b] \\
= & \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}[a, i] \left(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{G}[i, j]\, \mathbf{G}[j, b] \right) \\
= & \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{G}[a, i]\, \mathbf{G}[i, j]\, \mathbf{G}[j, b]
\end{aligned}
$$

$\mathbf{G}[a, i]\, \mathbf{G}[i, j]\, \mathbf{G}[j, b] = 1$

当且仅当

$$a \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow b$$

邻接矩阵的立方

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{G}^3[a,b] \\
=\;& \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}[a,i]\,\mathbf{G}^2[i,b] \\
=\;& \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}[a,i]\left(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{G}[i,j]\,\mathbf{G}[j,b]\right) \\
=\;& \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{G}[a,i]\,\mathbf{G}[i,j]\,\mathbf{G}[j,b]
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{G}[a,i]\,\mathbf{G}[i,j]\,\mathbf{G}[j,b] = 1$$

当且仅当

$$a \to i \to j \to b$$

a到b长度为3的路径条数。

邻接矩阵的k次方

$\mathbf{G}^k[a,b]$等于a到b长度为k的路径条数？

邻接矩阵的k次方

$\mathbf{G}^k[a,b]$等于a到b长度为k的路径条数？

Yes！！！

邻接矩阵的k次方

$\mathbf{G}^k[a,b]$等于a到b长度为k的路径条数？

Yes！！！

重边？自环？

邻接矩阵的k次方

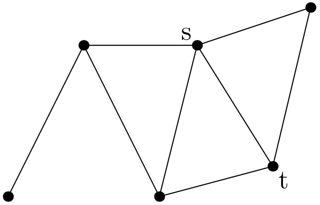
$\mathbf{G}^k[a,b]$等于a到b长度为k的路径条数？

Yes！！！

重边？自环？

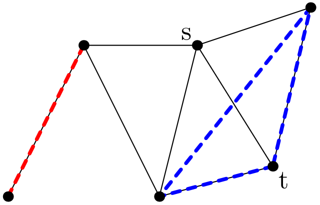
无须特判

题目描述



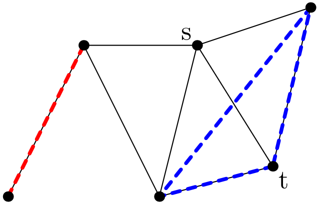
- 一张无向图　不超过50个点
- 起点s　终点t

题目描述



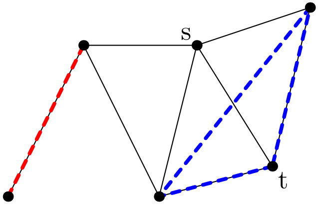
- 一张无向图　不超过50个点
- 起点s　终点t
- 一个单位时间移动一次

题目描述



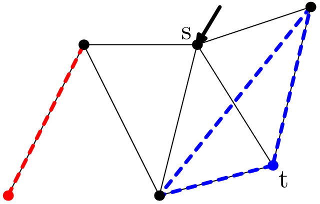
- 一张无向图　不超过50个点
- 起点s　终点t
- 一个单位时间移动一次
- 一些食人鱼作周期运动
  长度不超过4
- 人不能碰到食人鱼

题目描述



- 一张无向图　不超过50个点
- 起点s　终点t
- 一个单位时间移动一次
- 一些食人鱼作周期运动
  长度不超过4
- 人不能碰到食人鱼
- 时刻u到达终点　$u \leq 2 \times 10^9$

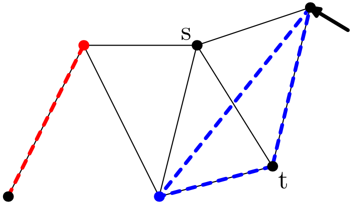
题目描述



$u = 4$　时刻0

- 一张无向图　不超过50个点
- 起点s　终点t
- 一个单位时间移动一次
- 一些食人鱼作周期运动 长度不超过4
- 人不能碰到食人鱼
- 时刻u到达终点　$u \leq 2 \times 10^9$

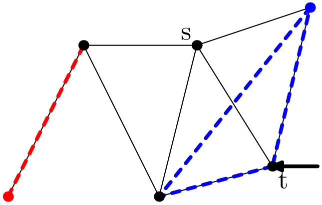
题目描述



$u = 4$　时刻1

- 一张无向图　不超过50个点
- 起点s　终点t
- 一个单位时间移动一次
- 一些食人鱼作周期运动长度不超过4
- 人不能碰到食人鱼
- 时刻u到达终点　$u \leq 2 \times 10^9$

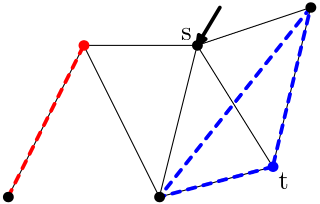
题目描述



$u=4$　时刻2

- 一张无向图　不超过50个点
- 起点s　终点t
- 一个单位时间移动一次
- 一些食人鱼作周期运动 长度不超过4
- 人不能碰到食人鱼
- 时刻u到达终点　$u \le 2 \times 10^9$

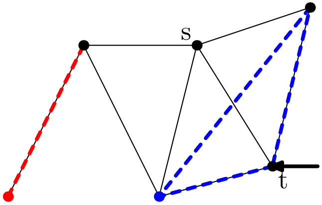
题目描述



$u = 4$　时刻3

- 一张无向图　不超过50个点
- 起点s　终点t
- 一个单位时间移动一次
- 一些食人鱼作周期运动长度不超过4
- 人不能碰到食人鱼
- 时刻u到达终点　$u \leq 2 \times 10^9$

题目描述



$u = 4$　时刻4

- 一张无向图　不超过50个点
- 起点s　终点t
- 一个单位时间移动一次
- 一些食人鱼作周期运动
  长度不超过4
- 人不能碰到食人鱼
- 时刻u到达终点　$u \leq 2 \times 10^9$

初步分析

设$\mathbf{A_u}[a,b]$为时刻0在a，时刻u在b的路径条数

初步分析

设$\mathbf{A_u}[a,b]$为时刻0在a，时刻u在b的路径条数

没有食人鱼的情况：

初步分析

设$\mathbf{A_u}[a,b]$为时刻0在a，时刻u在b的路径条数

没有食人鱼的情况：$\mathbf{A_u} = \mathbf{G}^u$

初步分析

设$\mathbf{A_u}[a,b]$为时刻0在a，时刻u在b的路径条数

没有食人鱼的情况：
$$\begin{aligned}\mathbf{A_u} &= \mathbf{G}^u \\ \mathbf{G}^u &= \mathbf{G}^{u-1}\mathbf{G} \\ \mathbf{G}^u[a,b] &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}^{u-1}[a,i]\,\mathbf{G}[i,b]\end{aligned}$$

初步分析

设$\mathbf{A_u}[a,b]$为时刻0在a，时刻u在b的路径条数

没有食人鱼的情况：

$$\begin{aligned}
\mathbf{A_u} &= \mathbf{G}^u \\
\mathbf{G}^u &= \mathbf{G}^{u-1}\mathbf{G} \\
\mathbf{G}^u[a,b] &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}^{u-1}[a,i]\,\mathbf{G}[i,b]
\end{aligned}$$

初步分析

设$\mathbf{A_u}[a,b]$为时刻0在a，时刻u在b的路径条数

没有食人鱼的情况：
$$
\begin{aligned}
\mathbf{A_u} &= \mathbf{G}^u \\
\mathbf{G}^u &= \mathbf{G}^{u-1}\mathbf{G} \\
\mathbf{G}^u[a,b] &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}^{u-1}[a,i]\,\mathbf{G}[i,b]
\end{aligned}
$$

有食人鱼的情况：$\mathbf{A_u} = \mathbf{A_{u-1}}\mathbf{G_u}$

初步分析

设$\mathbf{A_u}[a,b]$为时刻0在a，时刻u在b的路径条数

没有食人鱼的情况：
$$\begin{aligned}\mathbf{A_u} &= \mathbf{G}^u \\ \mathbf{G}^u &= \mathbf{G}^{u-1}\mathbf{G} \\ \mathbf{G}^u[a,b] &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}^{u-1}[a,i]\,\mathbf{G}[i,b]\end{aligned}$$

$$a \dashrightarrow i \rightarrow b$$

有食人鱼的情况：$\mathbf{A_u} = \mathbf{A_{u-1}}\mathbf{G_u} = \mathbf{G_1}\mathbf{G_2}\cdots\mathbf{G_u}$

解决问题

快速求$\mathbf{G_1 G_2 \cdots G_u}$？

解决问题

快速求$\mathbf{G_1 G_2 \cdots G_u}$？

食人鱼周期不超过4

$\operatorname{lcm}(1,2,3,4) = 12$

$\mathbf{G_i} = \mathbf{G_{i+12}}$

解决问题

快速求$\mathbf{G_1 G_2 \cdots G_u}$?

食人鱼周期不超过4

$\operatorname{lcm}(1,2,3,4) = 12$

$\mathbf{G_i} = \mathbf{G_{i+12}}$

$\mathbf{G}' = \mathbf{G_1 G_2 \cdots G_{12}} \quad u = 12p + q, 0 \le q < 12$

$\mathbf{G_1 G_2 \cdots G_u} = \mathbf{G'^{p} G_1 \cdots G_q}$

计算出$\mathbf{G'}$以及$\mathbf{G_1 \cdots G_q}$后用快速幂。

分析复杂度

时间复杂度:

计算$\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2\cdots\mathbf{G}_{12}$

分析复杂度

时间复杂度：

计算$\mathbf{G_1 G_2 \cdots G_{12}}$ $O\left(N^3\right)$

计算$\mathbf{G_1 \cdots G_q}$

分析复杂度

时间复杂度：

计算$\mathbf{G_1 G_2 \cdots G_{12}}$ $O\left(N^3\right)$

计算$\mathbf{G_1 \cdots G_q}$ $O\left(N^3\right)$

快速幂

分析复杂度

时间复杂度：

计算$\mathbf{G_1 G_2 \cdots G_{12}}$	$O\left(N^3\right)$
计算$\mathbf{G_1 \cdots G_q}$	$O\left(N^3\right)$
快速幂	$O\left(N^3 \log p\right) = O\left(N^3 \log u\right)$
计算最终答案	

分析复杂度

时间复杂度：

计算$\mathbf{G_1 G_2 \cdots G_{12}}$	$O\left(N^3\right)$
计算$\mathbf{G_1 \cdots G_q}$	$O\left(N^3\right)$
快速幂	$O\left(N^3 \log p\right) = O\left(N^3 \log u\right)$
计算最终答案	$O\left(N^3\right)$

总复杂度为$O\left(N^3 \log u\right)$。

总结

某两点间固定边数的路径问题

总结

某两点间固定边数的路径问题

某两点间边数在某个范围内的路径问题

总结

某两点间固定边数的路径问题

某两点间边数在某个范围内的路径问题

每两点间固定边数的路径问题

总结

某两点间固定边数的路径问题

某两点间边数在某个范围内的路径问题

每两点间固定边数的路径问题

每两点间边数在某个范围内的路径问题

总结

某两点间固定边数的路径问题

某两点间边数在某个范围内的路径问题

每两点间固定边数的路径问题

每两点间边数在某个范围内的路径问题

矩阵乘法

谢　谢！