



二分图

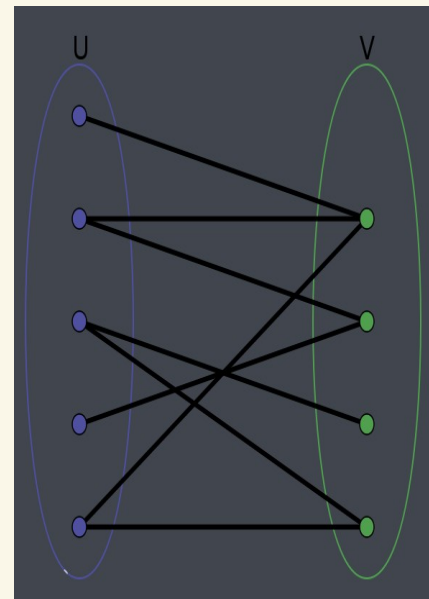
讲课：何振豪

主要内容

- 1. 什么是二分图
- 2. 二分图的判定
- 3. 二分图的最大匹配
- 4. 二分图的最小顶点覆盖
- 5. 二分图的最小路径覆盖
- 6. 二分图的最大独立集
- 7. 二分图的最佳完美匹配

什么是二分图??

- 如果能够将图中的所有点分为两个不相交的点集， U 和 V ，且图中的每一条边都满足一个点在 U ，另外一个点在 V ，我们就叫这种图为“二分图 (Bipartite Graph)”



二分图的判定

- 问题描述 (HDU 1068) : 给定 n 个学生, 告诉你有哪 m 对学生是相互认识的, 问你能不能把这 n 个学生分成两个组, 使组内的学生相互不认识。(注意 A 认识 B , B 认识 C , 但这并不意味着 A 与 C 认识。)

二分图的判定

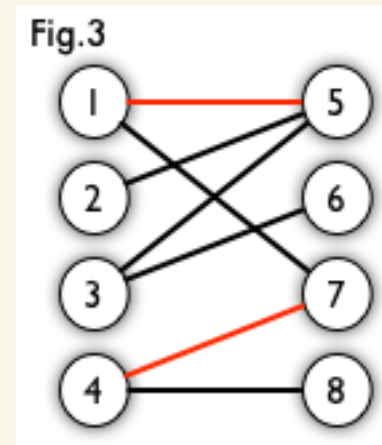
- 无向图 G 是二分图的充分必要条件是： G 至少有两个点，且其所有回路的长度都为偶数。（摘自某度百科）换句话说就是不存在奇数环（反证法）。
- 常用方法：染色法
- 具体步骤：
 - 先对任意一未染色的顶点染色，之后判断其相邻的顶点，若未染色则将其染上和相邻顶点不同的颜色，若已经染色且颜色和相邻顶点的颜色相同则说明不是二分图，若颜色不同则继续判断，知道所有点被分成不一样的颜色。
 - 以上过程用 DFS 和 BFS 都可以实现。
- 为什么染色法可以判定是否存在奇环呢？（简易画图即可得出答案）

二分图的最大匹配

- 问题描述 (HDU 2063)：坐过山车，每个过山车有两个座位，并且有个硬性规定：只能男的和女的坐在一起。但是，女孩们有自己的想法，他们只会找特定的男生。现给你女生和男生的人数和 k 组男女的组合，问你最大的可以做过山车的组合数。

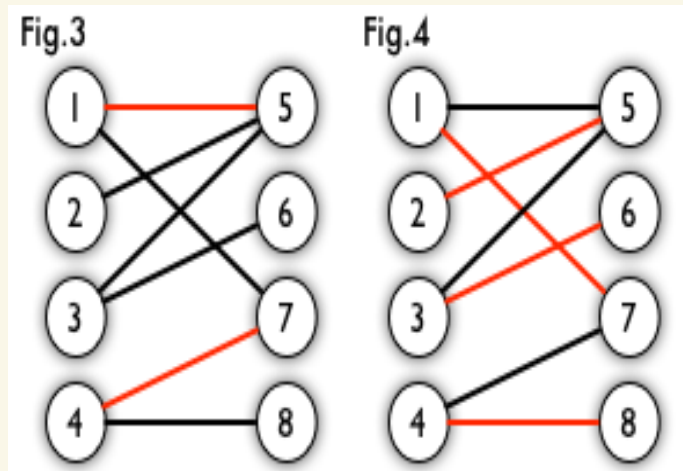
二分图的最大匹配

- 先来看 2 个概念吧！
- 交替路：就是从未匹配点出发，依次走的边属于未匹配边，匹配边.....未匹配边，匹配边；
- 增广路：就是从未匹配点出发，走交替路，最后走的是未匹配边，到达匹配点；
- 见图 Fig.3 我们假定红色部分是已匹配的边，黑色为未匹配的边；
- 由以上定义，我们可以发现一条增广路： $2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8$
- 恰好是从未配点出发，走交替路，又回到未配点。



二分图的最大匹配

- 增广路的性质：
 - (1) 有奇数条边；
 - (2) 起点在左边，终点在右边；
 - (3) 路径上的点一定是一个在左边，一个在右边，未匹配边，匹配边，未匹配边交替出现，最后一条是为匹配边；
 - (4) 路径上的点只有终点和起点不是匹配点，其余都是匹配点；
 - (5) 第奇数个边是未匹配边，第偶数个边是匹配边；
- 研究增广路的意义：只要将增广路的边做一个异或操作（将未匹配边变成匹配边，将匹配边变成未匹配边），匹配边的数量就能加一，反复寻找这个增广路的话，就能将匹配数不断增加，一直到找不到这个增广路，就说明当前找到的匹配是最大匹配。
- 从上述的图 Fig3 做异或操作即可得到 Fig4



二分图的最大匹配

- 匈牙利算法轮廓：
 - (1) 置匹配子图 M 为空；
 - (2) 找出一条增广路径 P ，通过异或（取反）操作获得更大的匹配子图 M' 代替 M ；
 - (3) 重复(2)操作直到找不出增广路径为止。
- 以上过程用 DFS 和 BFS 实现均可。
- 复杂度分析：
 - 因为每个点都要找一次增广路，这条路取最极端的长度就是边的数量，所以时间复杂度是 $O(V \cdot E)$ ；
 - 代码见附件

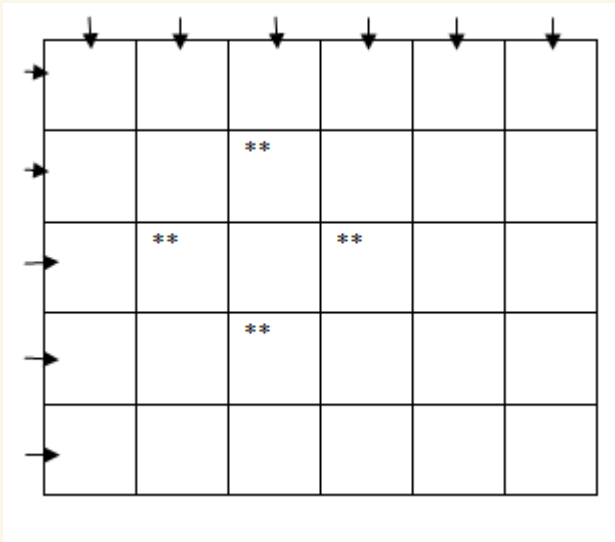
Hopcroft Karp 算法

- 在匈牙利算法中是通过每次找一次增广路来增加匹配的数量。如果点有上千个，又是稠密图，这个算法就跑不动了。
- 为了降低时间复杂度，在霍普克洛夫特-卡普算法中，我们在增加匹配集合 M 时，每次寻找多条增广路。
- 可以证明，这样只需要最多增广 $2 * |V|^{0.5}$ ，所以时间复杂度是 $O(|E| |V|^{0.5})$ 。
- 代码见附件

- 实际上后面要讲的所有二分图匹配问题都是由这个匈牙利算法延伸而来的，至少主要核心内容就是寻找增广路。

二分图最小点覆盖

- 问题描述：给你一个 $N * M$ 的矩阵，矩阵的格子可能有不明物体，需要用激光消灭，激光在边界均有设置，只能射出直线，问你最少用多少次激光将所有不明物体消灭。如图：



答案显然是 2

二分图最小点覆盖

- 最小点覆盖指的是在二分图中求最少的点，让每边都至少和其中的一个点关联。
- König 定理：二分图中的最大匹配数等于这个图中的最小点覆盖数（具体证明可以参考 Matrix67 的博文：<http://www.matrix67.com/blog/archives/116>）
- 回到刚才那道题：为什么是最小点覆盖？？
- 可以把横坐标（ $1 \dots n$ ）看做左边的集合，纵坐标（ $1 \dots m$ ）看做右边的集合，然后根据题设，射出激光就意味着取一个点，因为如果取出的点是左边的集合，那就横坐标被覆盖，取出的点是右边的点就纵坐标被覆盖，不难得出答案最大是 $\min(n, m)$ ；

二分图最小路径覆盖

- 问题描述：选择用尽量少的不相交简单路径，使其覆盖所有顶点，且任何一个顶点有且只有一条路径与之关联。换句话说，就是选尽量少的边，把这些边都从起点走到终点，恰好能够经过整个图的所有顶点。问你这些边的数量。
- 定理：路径覆盖与二分图匹配的关系：最小路径覆盖 = $|G| - \text{最大匹配数}$

二分图最大独立集

- 问题描述：有个图有 V 个结点， E 条边，任选图中一个顶点，把它染成黑色，则和它相连的顶点必须都被染成白色，但与被染成白色的顶点相连的顶点可以被染成白色也可以被染成黑色，问：这个图最多有多少个顶点能被染成黑色？

二分图最大独立集

- 最大独立集合最小覆盖是互补的，因此答案是结点总数减去最大匹配数。
- 为什么而这互补呢??
- 覆盖集：对于 每条边，至少有一个点要被选中。
- 独立集：对于每条边，至少有一个点不要被选中。
- 这样每个覆盖集就和唯一一个独立集互补，二每个独立集也都和一个唯一覆盖剂互补，因此最小覆盖集和最大独立集是互补的。
- ----- 摘自训练指南

二分图最佳完美匹配

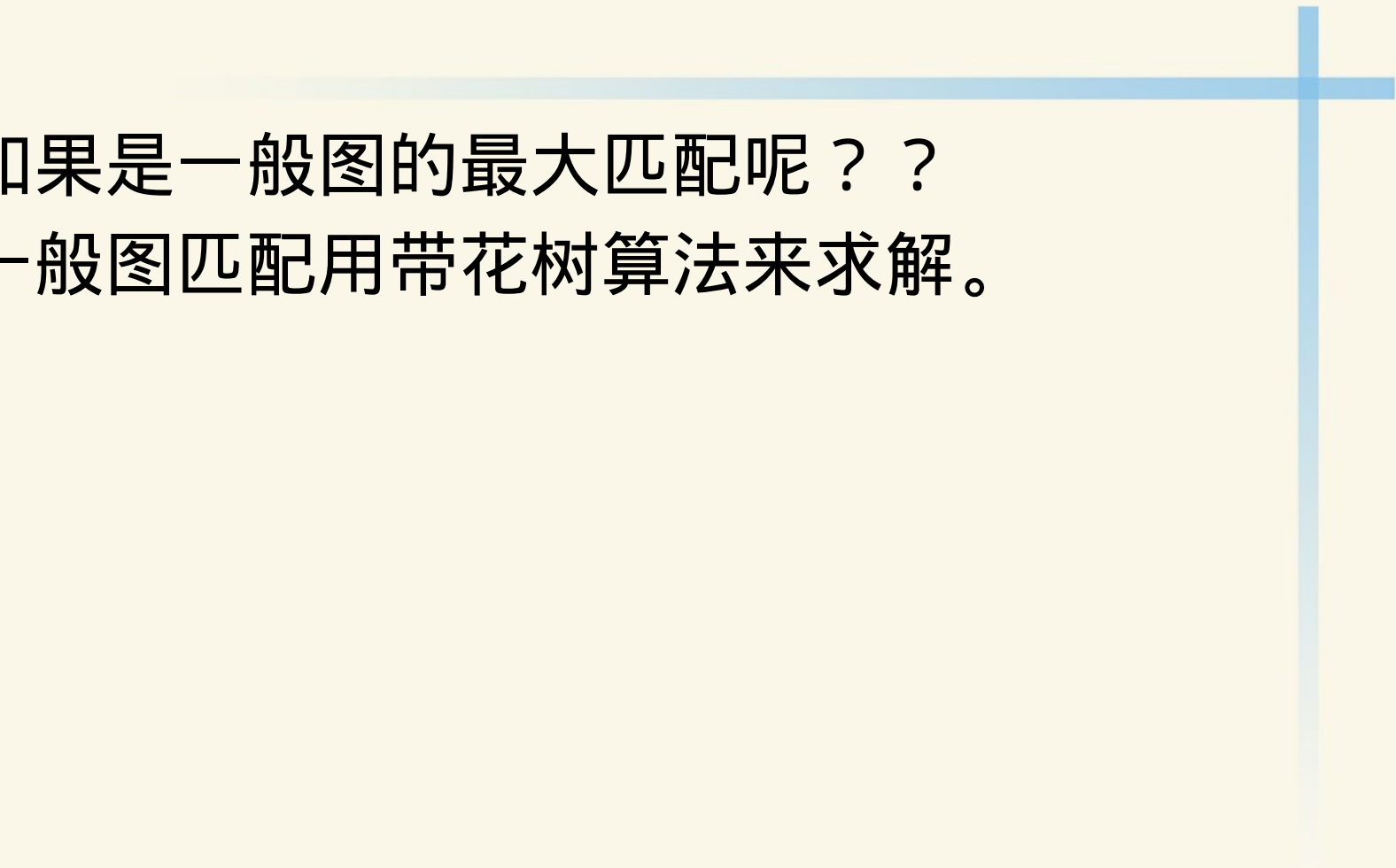
- 问题描述：假定有一个完全二分图 G ，每条边有一个权值（可以为负数），问你权值最大的完美匹配是多少？？

二分图最佳完美匹配

- 先看两个概念：
- (1) 可行顶标：每个点都有一个可行顶标，在 X 集合称为 L_x ，在 Y 集合的称为 L_y ，然后可行顶标都满足一个性质 $L_x[i] + L_y[j] \geq G[i][j]$ ；
- (2) 相等子图：其实是二分子图，但是这个图的边都满足 $L_x[i] + L_y[j] = G[i][j]$ ；
- 一个定理：如果相等子图存在完美匹配，则该匹配就是原图的最大匹配。
- 证明不难，详细请戳：
- <http://www.cnblogs.com/jackge/archive/2013/05/03/3057028.html>
- <http://philoscience.iteye.com/blog/1754498>

二分图最佳完美匹配

- 算法流程：
 - (1) 初始化可行顶标的值
 - (2) 用匈牙利算法寻找完备匹配
 - (3) 若未找到完备匹配则修改可行顶标的值，使相等子图包含更多的边
并保证 $lx[i]+ly[j] \geq weight[i][j]$ 。
 - (4) 重复 (2)(3) 直到找到相等子图的完备匹配为止
- 详细代码见附件

- 
- 如果是一般图的最大匹配呢??
 - 一般图匹配用带花树算法来求解。

附件

- Hopcroft Karp 算法 :
- <http://paste.ubuntu.com/11980011/>
- KM 算法 :
- $O(n^4)$:
- <http://paste.ubuntu.com/11979990/>
- $O(n^3)$:
- <http://paste.ubuntu.com/11979986/>

CH



谢谢观看 ~~

正在关机...

 Windows 7 Ultimate