区间图、弦图和完美图介绍

内容介绍

- 在本讲中将主要介绍
  - 区间图 (interval graph)
  - 区间图上的色数 (chromatic number) 和最大团问题 (maximum clique)
  - 完美消除序列 (perfect elimination order)
  - 弦图 (chordal graph) 及其判定
  - 区间图的判定
  - 完美图 (perfect graph)

区间图 – POJ1083

- [POJ1083] Moving Tables

room 1	room 3	room 5	•••	room 397	room 399
corridor					
room 2	room 4	room 6	•••	room 398	room 400

一个公司有 400 个房间，布局如上图所示。编号为奇数的房间在背面，编号为偶数的房间在南面，中间被一条走廊隔开。现在公司要将某些桌子从一个房间移动到另一个房间。走廊很窄，如果两张桌子需要经过同一段走廊的话，那么它们不能同时移动。每移动一张桌子需要 10 分钟。问最少需要多久才能将所有桌子移动完毕。

区间图 – POJ1083

room 1	room 3	room 5	...	room 397	room 399
corridor					
room 2	room 4	room 6	...	room 398	room 400

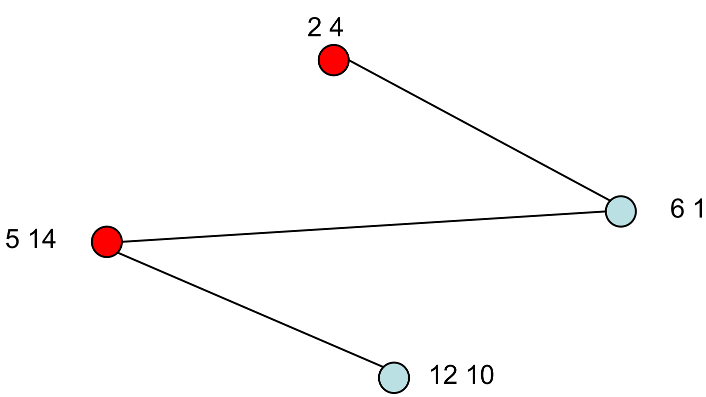
Moving：

2 -> 4

5 ->14

12 -> 10

6 -> 1



求一般图的色数是 NP 难问题
！

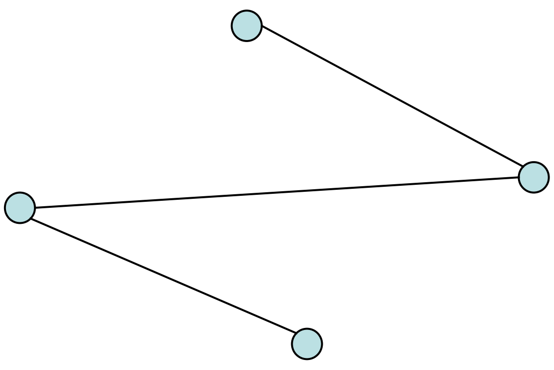
区间图 – 定义

- 一个区间是有两个端点的线段，端点可以是开的或闭的。给定一些区间，可以定义一个相交图。
- 定义 1：给定一些区间，定义一个相交图的每个顶点 v 代表一个区间 Iv, 顶点 (v,w) 间有边，当且仅当 Iv 交 Iw 非空。

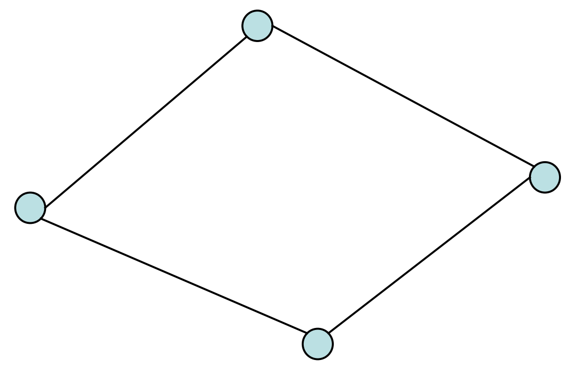
- 定义 2：一个图 G 是区间图，如果它是若干区间的相交图。

区间图 – 例

- 区间图的例子

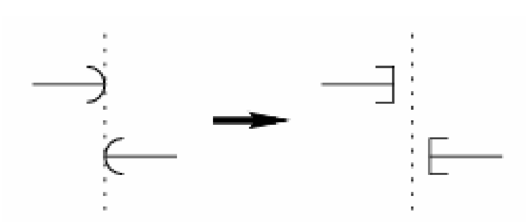


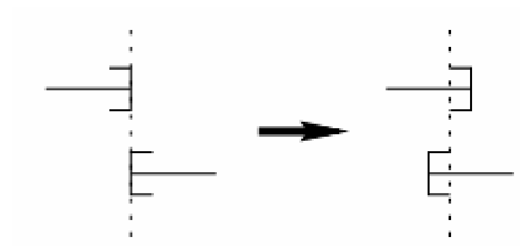
- 不是区间图的例子

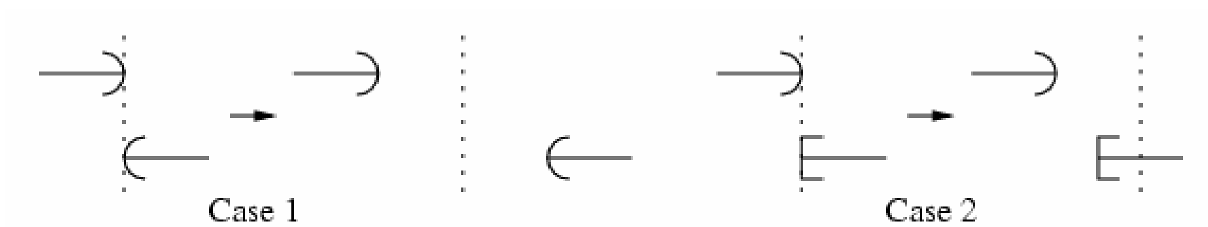


区间图 – 顶点排序

- 定理 1：开区间、闭区间、半开闭区间对应的区间图是等价的。
- 证明思路：由于区间在连续的实数轴上，我们可以对区间做小量伸缩而不影响相交情况





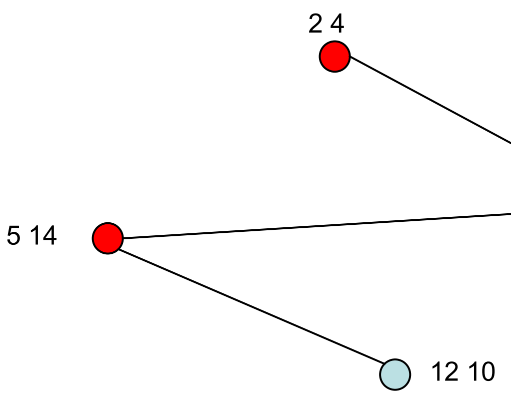


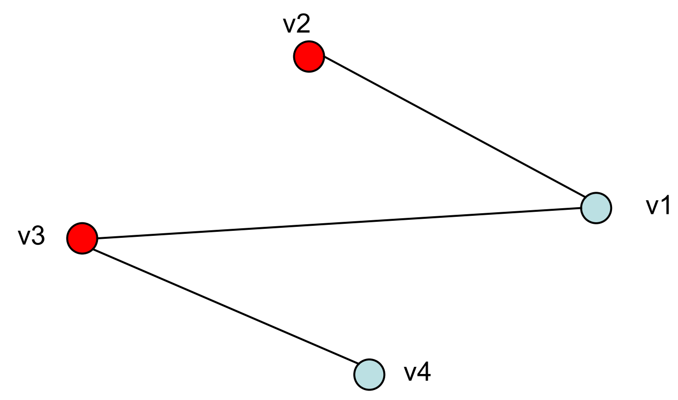
区间图 – 顶点排序

- 推论 1： 任何区间图 G 都存在一个没有重点的区间表示

- 于是我们可以将 G 的顶点按其代表区间的左端点排序，称之为区间图 G 顶点的自然排序

区间图 – 顶点排序





区间图 – 顶点排序

- 定义 2： $Pred(V_i) = \{V_j \mid (V_i, V_j) \in E \wedge j < i\}$ 为顶点 Vi 的前驱

- $\{V_i\} \cup Pred(V_i)$ 是一个团

区间图 – 最小染色算法

令 v1, v2 .. vn 为顶点的一个自然排序，一下算法得到区间图 G 的一个最小染色

INPUT: Graph G, vertex ordering $v_1, \ldots, v_n$

    for i = 1$\ldots n$ $\{$

        let j be the smallest color not used in Pred(v_i).

        color v_i with color j.

    $\}$

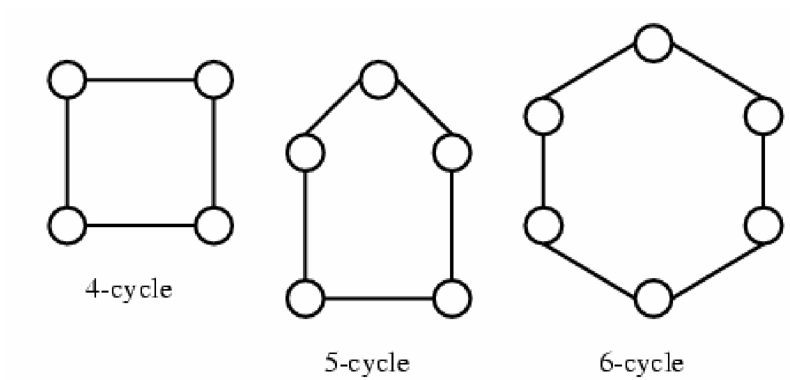
完美消除序列

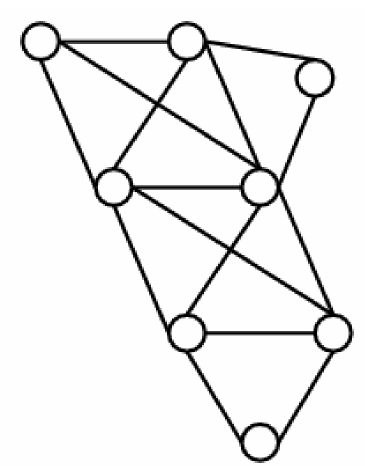
- 定义：一个顶点序列 {V1..Vn} 如果对任意 i 满足 Pred（ Vi ）是一个团，那么这种序列称为完美消除序列。

  - 最大团
  - 最大独立集
  - 最小覆盖
  - 最小团覆盖
  - ……

弦图

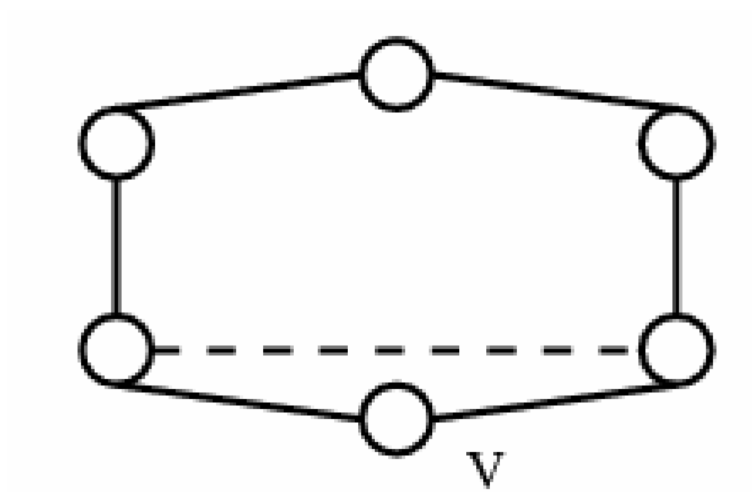
- 定义：如果一个图的任何诱导子图都不是 K 阶环（ K>=4 ），那么该图称为弦图





弦图与完美消除序列

- 定理：如果一个图 G 具有完美消除序列，则 G 是弦图。



弦图与完美消除序列

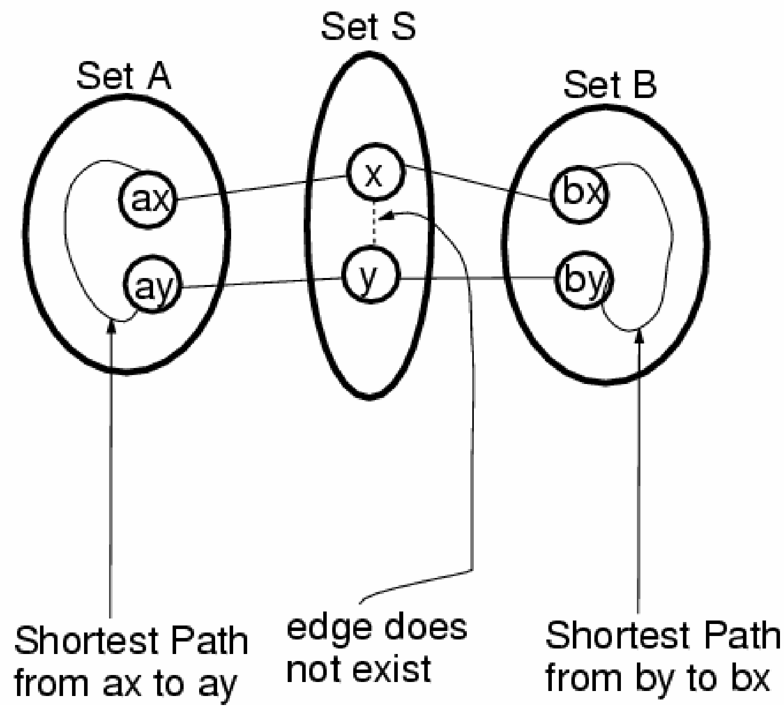
- 定理：图 G 是弦图，当且仅当 G 具有完美消除序列

弦图与完美消除序列

- 定义：如果与顶点 V 相邻的所有顶点构成一个团，则 V 称为单纯点
- 引理 1：任何弦图 G 具有至少一个单纯点。如果 G 不是完全图，那么它至少具有两个不相邻的单纯点。
- 引理 2：弦图的任何诱导子图都是弦图。

弦图与完美消除序列

- 引理 1：任何弦图 G 具有至少一个单纯点。如果 G 不是完全图，那么它至少具有两个不相邻的单纯点。



弦图与完美消除序列

- 最大势算法 (MCS)

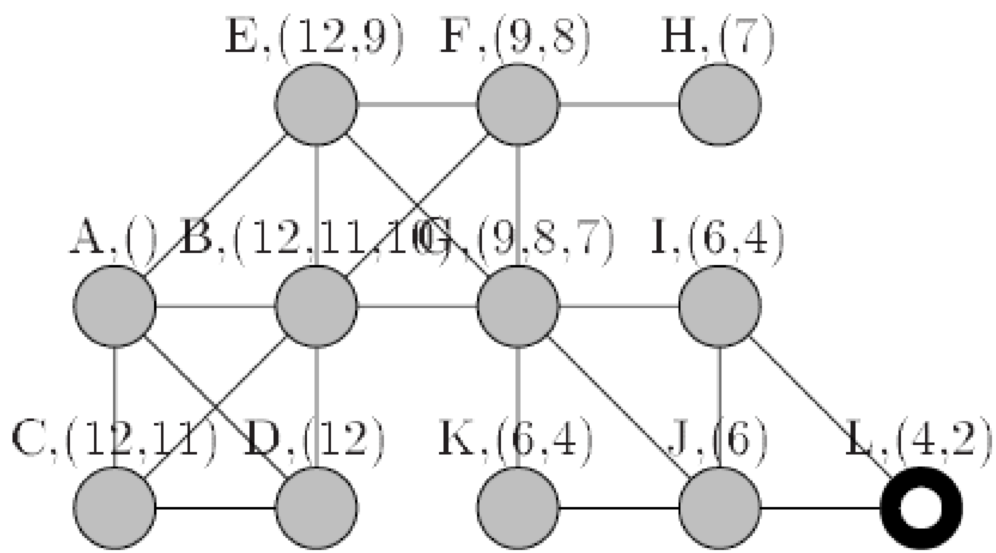
for i = 1, . . . , n
  Let v_i be the vertex such that $v_i \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ and
    v_i has the most neighbours in $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$

- 字典序广度优先搜索 (Lexicographical B

For all vertices v, let $L(v) = \emptyset$ (label)
for i = n, . . . , 1
  Let v_i be the vertex such that $v_i \notin \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}\}$ and
    v_i has the lexicographically largest label $L(v_i)$
  For all neighbours v of v_i, set $L(v) = L(v) \circ i$

弦图与完美消除序列

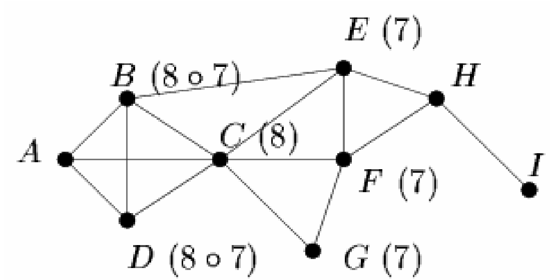
- LexBFS

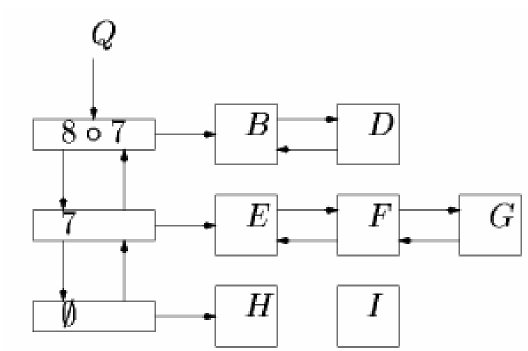


{A, D, C, B, E, F, G, H, J, K, I, L}

弦图的判定

- LexBFS – O(n + m)





1. 令 Vi 是第一个桶中的第一个元素 (显然 Vi 是目前标号最大的一个顶点) 。
2. 将 Vi 从桶 S(L(Vi)) 中删去。
3. 如果 S(L(Vi)) 已空，将它从 Q 中删去。
4. 对于每个 Vi 的相邻点 W：
5. 如果 W 仍在 Q 中 (W 尚未选择，必须更新它的标号和在 Q 中的位置)
6. 找到 S(L(W)) 以及它在 Q 中的位置。
7. 寻找 Q 中 S(L(W)) 上一个桶。
8. 如果这样的桶不存在 , 或它不是 S(L(W) ○ i)
9. 在 Q 中的当前位置建立一个桶 S(L(W) ○ i)
10. 将 W 从 S(L(W)) 中取出并加入 S(L(W) ○ i) 中
11. 如果 S(L(W)) 已空，将它删除。
12. 将 L(W) 更新为 L(W) ○ i 。

弦图的判定

- 检验 – O(n + m)

1. for $j = n$ down to 1 do
2.   if v_j has predecessors
3.   Let u be the last predecessor of v_j.
4.   Add $Pred(v_i) - \{u\}$ to $Test(u)$.
            ($Test(u)$ denotes the multi-set of vertices for which we want to test whether they are neighbours of u.)
5.   (Now test $Test(v_j)$.)
6.   Mark all vertices in $\mathrm{Pred}(v_j)$ as touched
7.   for every vertex w in $Test(v_j)$,
8.   if w is not touched, return FALSE.
9.   Mark all vertices in $\mathrm{Pred}(v_j)$ is untouched
10. return TRUE

弦图的判定

- ZOJ – Fishing Net
- 判断一个图是不是弦图

再谈区间图

定理：以下命题是等价的：

- (1) G 是区间图
- (2) G 是弦图，且 G 是伴相似图 (co-comparability graph) 。
- (3) G 的极大团可以连续地编号。即我们可以将它们排为 C1..Ck ，满足对于任何 v∈V ，序列 {j| j∈{1..k}， v∈Cj} 是连续整数集。

再谈区间图

- 定义：一个能够无环且具有传递性地定向的无向图 G 称为相似图。

- 定理： (1) -> (2)
- 定理： (3) -> (1)
  - $I(V) = [\mathrm{Min}\{i \mid V \in C_i\}, \quad \mathrm{Max}\{ i \mid V \in C_i \}]$

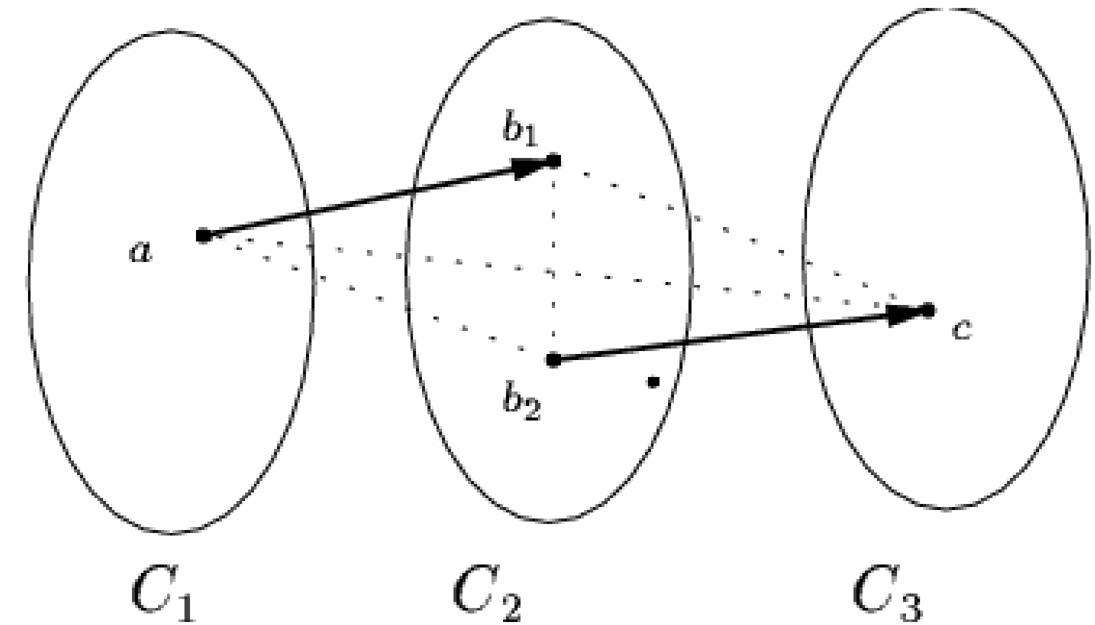
再谈区间图

- 定理 (2) -> (3)

- 令 G’ 是 G 补图经过无环传递定向后的有向图。构造有向图 H. $V(H) = C$, $<C1, C2> \in E(H) \Leftrightarrow$ 存在 $x \in C1, y \in C2$ 且 $<x, y> \in G'$

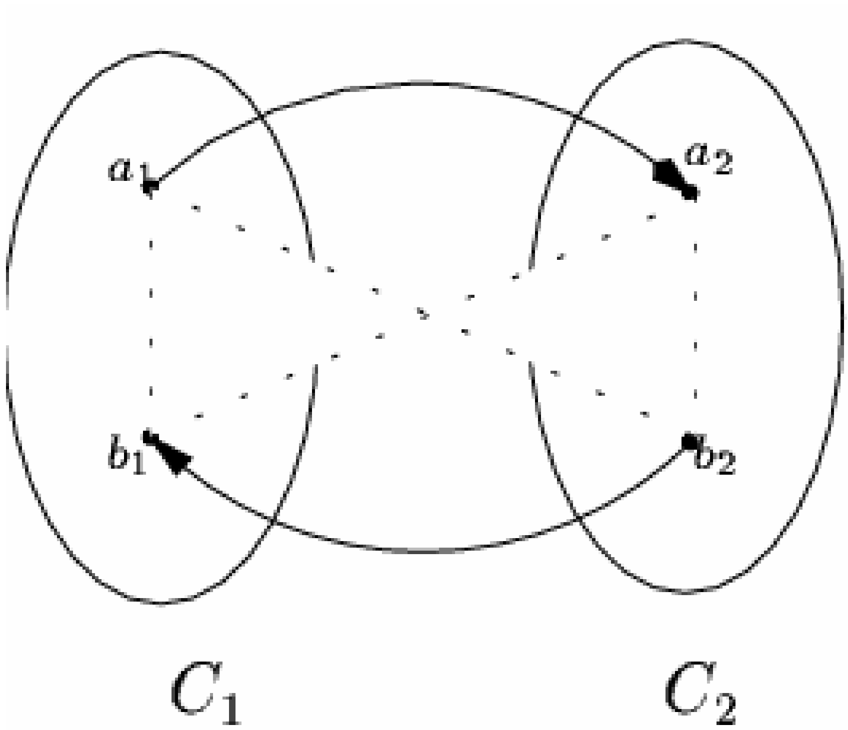
再谈区间图

- 定理： H 是传递的



再谈区间图

- 定理：H 是无环的



再谈区间图

- 定理： H 的一个拓扑排序 C1, C2, … Ck 是满足 (3) 的一个序列

区间图的判定

```
INPUT: a graph G
OUTPUT: yes, G is an interval graph; or no, G is not an interval graph

1. Find all the maximal cliques of G.
2. Try to order the maximal cliques of G such that the set of cliques
   containing any given vertex of G are consecutive.
```

区间图的判定

- 定理：设 G 是弦图， M 是 G 的一个极大团，则存在 i， $M = \{V_i\} \cup Pred(V_i)$

- 定理： $\{V_i\} \cup Pred\{V_i\}$ 是极大团，当且仅当对 V_i 的任何后继 V_j，至少有一个 V_i 的前驱不是 V_j 的前驱。

区间图的判定

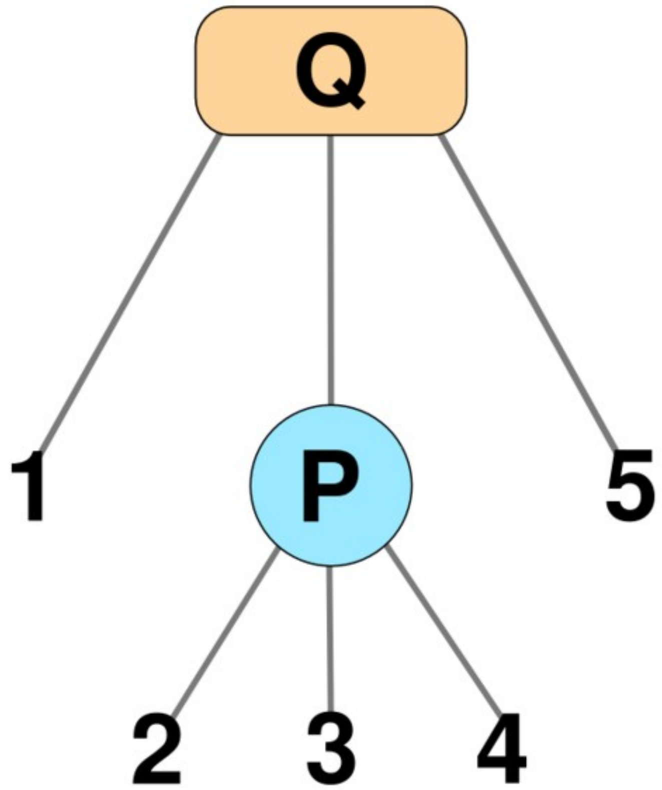
- 连续 1 性质 (consecutive ones property, COP or C1P)
  - POJ2790：判断一个矩阵是否具有 C1P
  - A_{nm}， $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow Vi \in Cj$
- 01010
  01000
  10101
  10100
  00011
  00101

区间图的判定

- N = 4
- S1={2, 3}
- {<1,2,3,4>,<1,3,2,4>,<1,4,2,3>,<1,4,3,2>,<2,3,1,4>,<2,3,4,1>,<3,2,1,4><3,2,4,1>,<4,1,2,3>,<4,1,3,2>,<4,2,3,1>,<4,3,2,1>}
- S2={3, 4}
- {<1,2,3,4>,<1,4,3,2>,<2,3,4,1>,<4,3,2,1>}

区间图的判定

- PQ-tree



http://gregable.com/2008/11/pq-tree-algorithm-and-consecutive-ones.html

http://www.jharris.ca/portfolio/code/pqtree/PQTree.html

区间图的判定

```
PQ-tree procedure REDUCE(T, S);
begin
  initialize QUEUE to empty;
  for each leaf X in U do place X onto QUEUE;
  while |QUEUE| > 0 do begin
    remove X from the front of QUEUE;
    if some template applies to X then
      substitute the replacement for the pattern in T
    else begin
      T:= null tree;
      break;
    end;
    if S is subset {Y|Y is a leaf and X is an ancestor of Y} then break;
    if every sibling of X has been matched then
      place the parent of X onto QUEUE;
  end;
  return T;
end
```

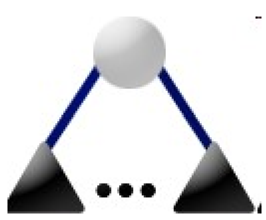
pertinent-root

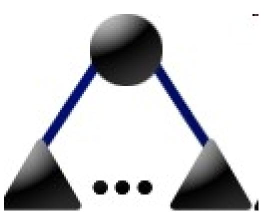
区间图的判定

- L1
  - 当前节点是叶子
  - 标记为 full

区间图的判定

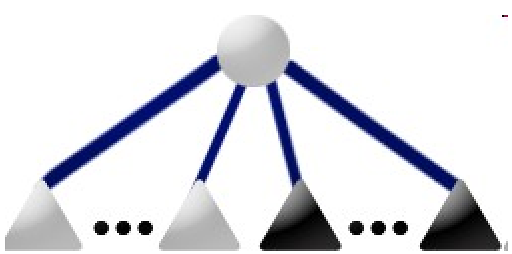
- P1
  - 当前节点是 P-node, 子节点都是 full
  - 标记为 full

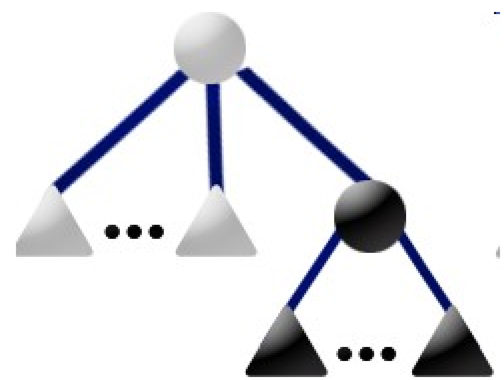




区间图的判定

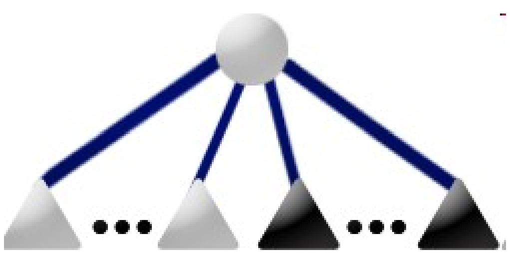
- P2
  - P-node,pertinent-root,full + empty
  - 增加新的 P-node 作为 full 子节点的父节点及当前节点的子节点 (如果只有 1 个 full 子节点则不增加新的 P-node)

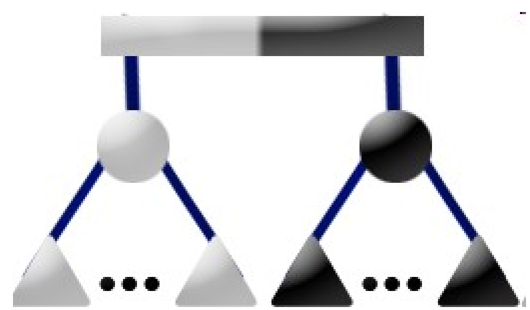




区间图的判定

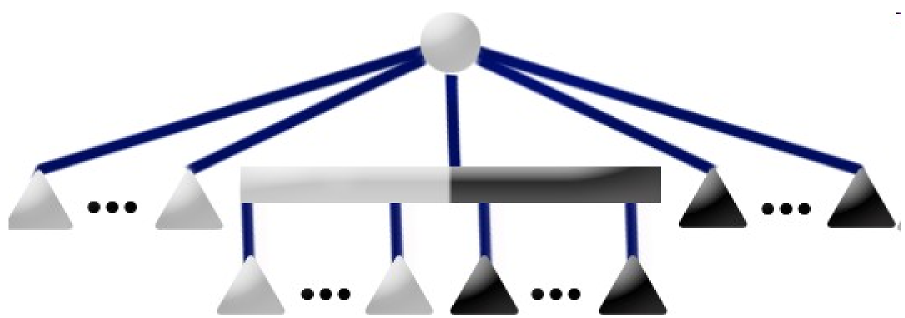
- P3
  - P-node,**not** pertinent-root,full + empty
  - 当前节点标记为 partial Q-node, 增加新的 P-node 作为 full 子节点的父节点及当前节点的子节点 , 增加新的 P-node 作为 empty 子节点的父节点及当前节点的子节点 ,

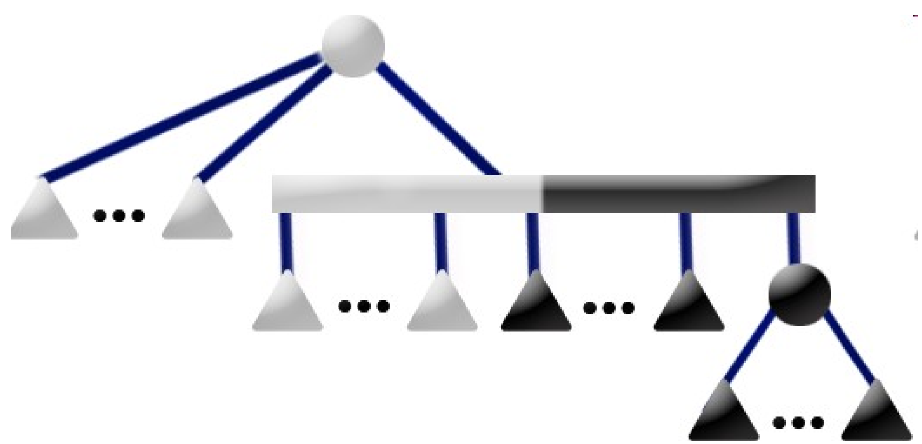




区间图的判定

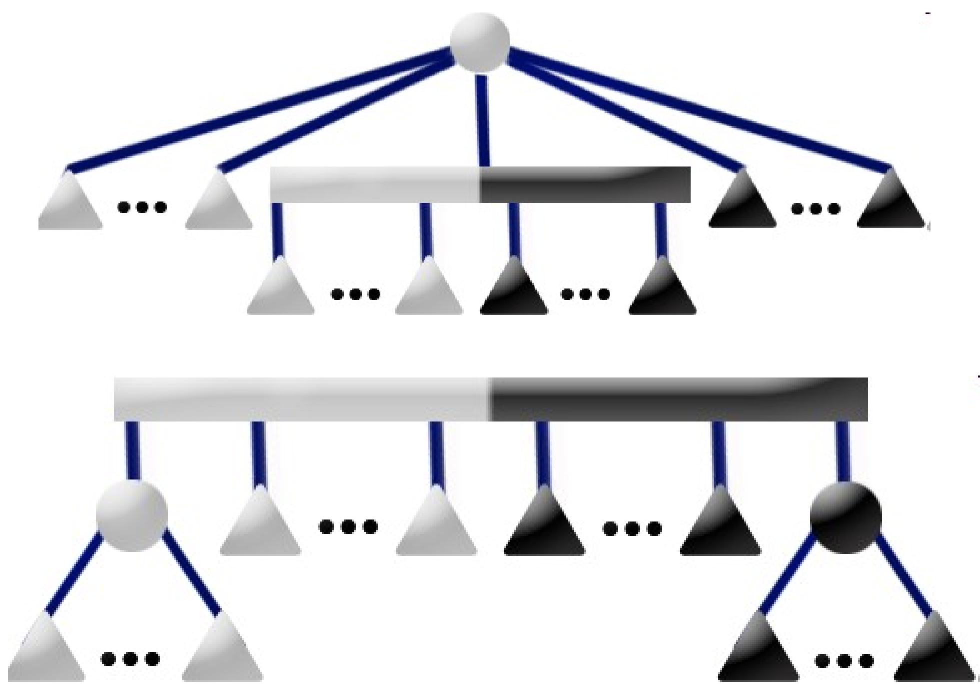
- P4
  - P-node,pertinent-root,1 partial + full + empty





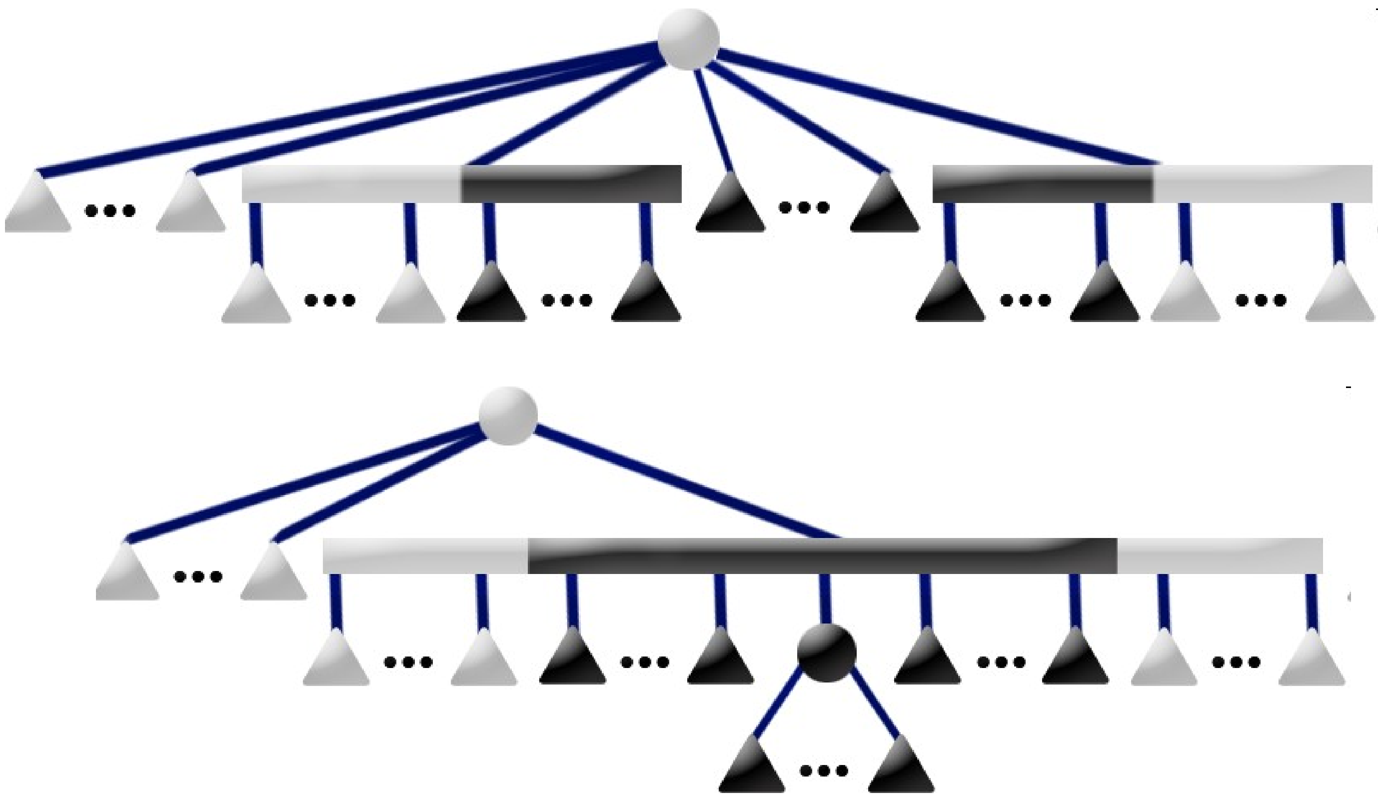
区间图的判定

- P5
  - P-node,**not** pertinent-root,1 partial + full + empty



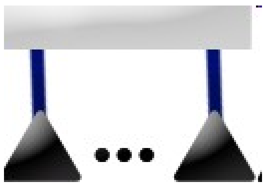
区间图的判定

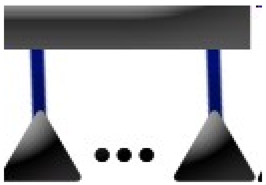
- P6
  - P-node,pertinent-root,2 partial + full + empty



区间图的判定

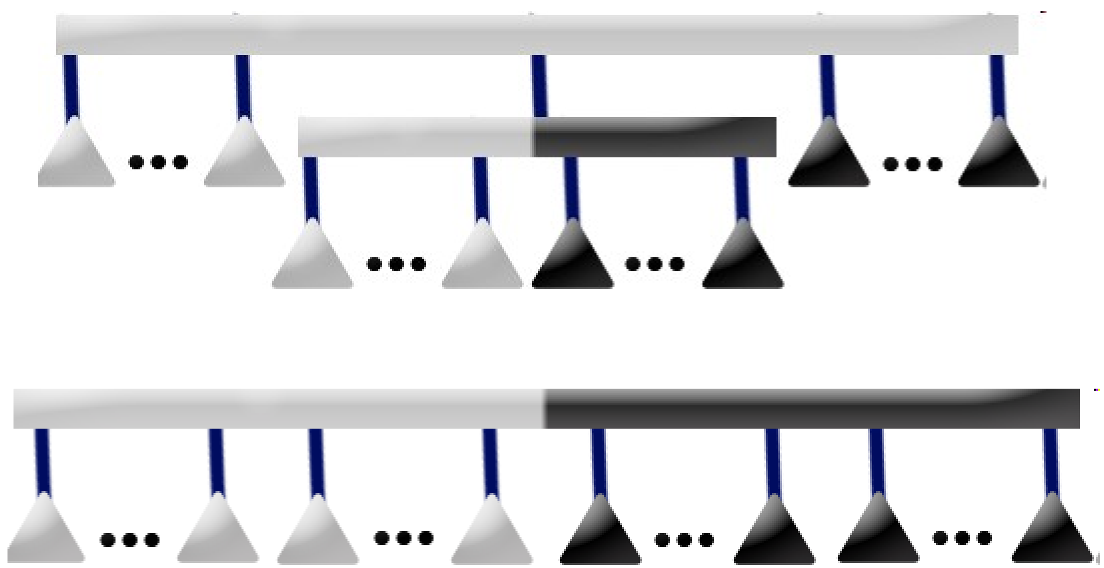
- Q1
  - Q-node,all full





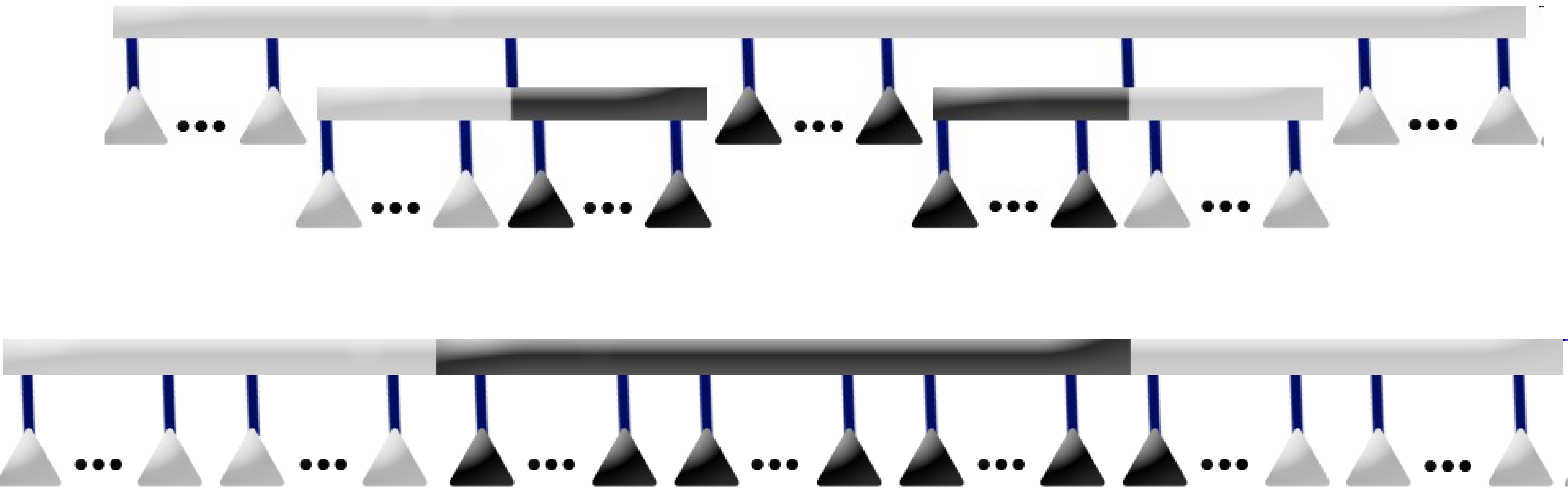
区间图的判定

- Q2
  - Q-node,0/1 partial + 连续 full + empty



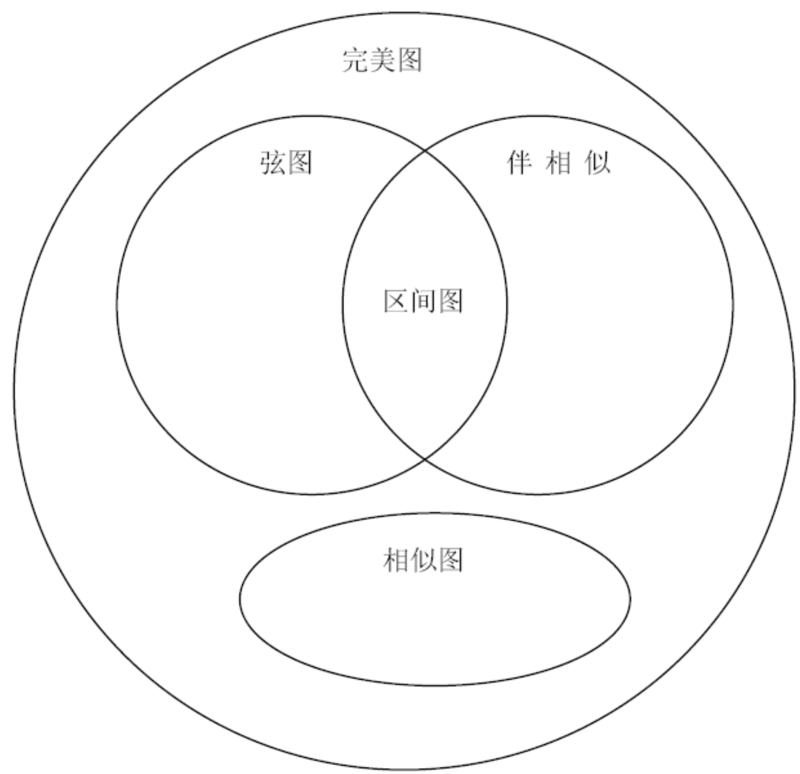
区间图的判定

- Q3
  - Q-node, 2 partial + 连续 full + empty



完美图

- 定义：一个图 G 是完美图，如果 W(G) ＝ X(G)，且对于 G 的任意诱导子图 H，都有 W(H) ＝ X(H)。



强完美图定理

- 强完美图定理 (SPGT)
  - 一个图是完美图，当且仅当它的任何大于 3 的诱导子图都不是奇阶洞或奇阶反洞