



专题讨论：分治方法

AC_Aerolight

2013.4.28~2013.4.29 @ Fuzhou

PREFACE

- 今天首先讨论的是一种特殊的分治方法，在OI界初见于陈丹琦2008年的集训队作业中，因此也被称为CDQ分治。
- 随后将讨论一些利用了分治思想的其他算法。
- 这节课的目的是科普，因此题目会较简单，讲解也会比较详细。如果对该算法或对特定问题已有深入了解可以跳过不听，但不要打扰其他同学。
- Let's begin.



PREFACE

- 先看几个常见的递归复杂度分析。
 - $T(n)=2T(n/2)+O(kn)$ 的解是 $T(n)=O(kn \log n)$
 - Master Theorem
 - $T(n)=2T(n/2)+O(kn \log n)$ 的解是 $T(n)=O(kn \log^2 n)$
 - $T(n)=2T(n/2)+O(k)$ 的解是 $T(n)=O(kn)$
 - 一棵 N 个节点的线段树上有几个节点?
 - K 是一个和 N 无关的多项式



INTRO: 归并排序

- 给定排列P, 求排列的逆序对数量。
- P的长度 ≤ 100000 。
- 要求 $O(n \log n)$

- 定义归并排序过程Merge(l,r)
- Merge(l,r)
 - Merge(l,mid)
 - Merge(mid+1,r)
 - Count(l,mid,mid+1,r)
- 只需要考虑左右两段之间造成的逆序对, 段内的逆序对由递归解决



[NOI2007] CASH

- 有两种金券，金券按比例交易：买入时，将投入的资金，购买比例为 $Rate[i]$ 的两种金券；卖出时，卖出持有的一定比例的金券。已知未来 n 天两种的金券价格 $A[i]$ 、 $B[i]$ ，初始资金为 s ，求最大获利。
- 为使获利最大，交易时显然应该全部买进或卖出。
- $1 \leq n \leq 100000$



[NOI2007] CASH

- 简要做法：
- 令 $F[i]$ 表示第 i 天获得的最大 B 卷数量。
- 枚举上一次交易日 j
- $F[i] = \max\{\text{ans}, \text{Rate}[j] * F[j] * A[i] + F[j] * B[i]\} / (\text{rate}[i] * a[i] + b[i])$
- $O(n^2)$
- 观察括号内的表达式，可以发现决策 J 优于决策 K 的条件： $(\text{rate}[j] * f[j] - \text{rate}[k] * f[k]) / (f[j] - f[k]) > -b[i] / a[i]$
- 上面这个式子的左边，一般记成 $\text{slope}(j, k)$



[NOI2007] CASH

- $\text{Slope}(j,k) > -b[i]/a[i]$
- 令 $G[i] = \text{rate}[i]*f[i]$ ，在二维平面上定义点 $X_i=(F_i, G_i)$
- $\text{Slope}(j,k)$ 就是通过 X_j 和 X_k 的斜率

- 维护一个点集 X ，支持以下两个操作：
 - 1) 在第一象限的任意位置插入一个点
 - 2) 给定负数斜率 K ，求所有斜率为 K 且过点集中任意点的直线在 Y 轴上的最大截距
- 操作2最终用到的点都会在点集的上凸壳上
 - 维护点集 X 的凸包，支持动态插入和斜率查询
 - 平衡树结构 $O(n \log n)$



[NOI2007] CASH

○ 算法存在的问题

- 边界情况众多
- 难写难调

○ 观察

- 操作2中，提供的斜率值是 $-b_i/a_i$ ，可以预处理得到而和F的取值无关
- 这意味着在插入节点 X_i 时，已经可以确认它对询问 $j(j>i)$ 带来的影响

○ 引入分治思想



[NOI2007] CASH

- 定义过程 $Solve(L,R)$
- 假设运行 $Solve(l,r)$ 可以得到 $F[l]$ 到 $F[r]$ 的值。
 - $[L,mid]$ 区间里的询问，可以直接递归 $Solve(l,mid)$ 解决。
 - $[mid+1,r]$ 区间里的询问 K ，会受到 $[mid+1,k]$ 这些点的影响，以及 $[l,mid]$ 的影响。前半部分可以递归解决。
- $Solve(l,r)$
 - 递归调用 $Solve(l,mid)$
 - 整体考虑 $[l,mid]$ 间的点对 $[mid+1,r]$ 间询问的影响。
 - 递归调用 $Solve(mid+1,r)$



[NOI2007] CASH

- 整体考虑 $[l, mid]$ 对 $[mid+1, r]$ 的影响
- 给定点集 X 和一系列询问
 - 每个询问是一个负数斜率
 - 回答所有斜率符合且通过点集 X 中任意点的直线中， Y 轴的最大截距是多少
- 只要考虑点集 X 的上凸包。
 - 对于每个询问，在凸包上二分即可。
- 这一步的复杂度是 $O(n \log n)$ ，这里 $n=r-l$ 。



[NOI2007] CASH

- 时间复杂度?
- $\text{Solve}(l,r)$ 的复杂度是 $O(n \log n)$
- $T(n) = 2T(n/2) + O(n \log n)$
- $T(n) = O(n \log^2 n)$

- 离最优化还有距离。

- 需要 $\log n$ 的地方
 - 1) 求点集凸包
 - 2) 二分答案



[NOI2007] CASH

○ 1) 点集凸壳

- 合并两个凸壳的时间复杂度是 $O(n+m)$
- $Solve(l,r)$ 结束后返回 $[X_l..X_r]$ 的凸壳
- 单步 $O(n)$, 总体 $O(n \log n)$

○ 2) 二分答案

- 放弃二分, 离线处理
- 把点集凸壳和所有询问排序, 用两个指针扫描

○ 2') 对询问排序

- 提前对询问进行一次归并排序, 存储所有中间结果
- 为什么不能在 $Solve()$ 时进行归并?
- 预处理复杂度 $O(n \log n)$, 主递归中单步 $O(n)$

○ $T(n)=2T(n/2)+O(n), T(n)=O(n \log n)$



[NOI2007] CASH

- $Solve(l,r)$ 是递归函数
- 如何消除递归？
 - 手工栈模拟递归
 - 存储中间过程？
- $T(n)$ 的解不变，但常数减小。
- 总结
 - 1) 分治思想->只考虑跨立作用
 - 2) 段内影响忽略不计->问题离线化



[WF2011] MACHINE WORKS

- 你的公司获得了一个厂房 N 天的使用权和一笔启动资金，你打算在这 N 天里租借机器进行生产来获得收益。
- 可以租借的机器有 M 台。每台机器有四个参数 D, P, R, G 。你可以在第 D 天花费 P 的费用（当然，前提是你有至少 P 元）租借这台机器，从第 $D+1$ 天起，操作机器将为你产生每天 G 的收益。在你不再需要机器时，可以将机器卖掉，一次性获得 R 的收益。
- **厂房里只能停留一台机器。**
- 不能在购买和卖出机器的那天操作机器，但是可以在同一天卖掉一台机器再买入一台。
- 在第 $N+1$ 天，你必须卖掉手上的机器。
- 求第 $N+1$ 天后能获得的最大资金。



[WF2011] MACHINE WORKS

- 数据范围
- 租借天数 $D \leq 10^9$
- 初始资金 $C \leq 10^9$
- 机器数 $N \leq 10^5$
- 对于每个机器：
 - 租借日 $D_i \leq D$
 - 买入价 P_i 和 卖出价 R_i 满足 $1 \leq R_i < P_i \leq 10^9$
 - 每日收益 G_i 满足 $1 \leq G_i \leq 10^9$



[WF2011] MACHINE WORKS

- 观察
 - 场地能放机器就一定要放么？
- 先将机器按照出售时间 D_i 排序。
- 将所有时间离散化。
- 用 F_i 表示在时刻 D_i 卖掉手上机器后最多剩下多少钱。
- $F_i = \text{Max} (F_{i-1}, F_j - P_j + R_j + G_j * (D_i - D_j - 1))$
- 条件是 $F_j > P_j$ 。
- $O(n^2)$



[WF2011] MACHINE WORKS

- $F_i = \text{Max} (F_{i-1}, F_j - P_j + R_j + G_j * (D_i - D_j - 1))$
 - $F_j > P_j$
- 令 $A_j = F_j - P_j + R_j - G_j * D_j - G_j$
- 那么 $F_i = \text{Max}(F_{i-1}, A_j + G_j * D_i)$

- 和上一题一样了。
- 注意到斜率 D_i 是不变的，因此可以对整个 $[F_1, F_n]$ 进行分治。

- 复杂度 $O(n \log n)$ ，和平衡树维护凸壳同阶



[WF2011] MACHINE WORKS

- $F[i] = \text{Max}(F[i-1], A[j] + G[j] * D[i])$
- 在平面上有若干直线 $y = G[j] * x + A[j]$
- 维护一个直线集，支持以下两类操作
 - 插入一次函数 $y = kx + b$
 - 给定询问 D ，求所有函数在 $x = d$ 上的最大值
- 维护一系列半平面交
- 对偶问题？



[BOI2007] MOKIA

- 有一个 2000000×2000000 的棋盘，每个格子上有一个数字 $A[x,y]$ ，现在要执行两类操作：
- Add $x\ y\ a$: $A[x,y] += a$
- Query $x_0\ y_0\ x_1\ y_1$: 询问矩阵 $(x_0,y_0)-(x_1,y_1)$ 内所有格子的数字和。
- Add操作数 ≤ 160000 Query操作数 ≤ 10000



[BOI2007] MOKIA

- 棋盘大小和询问数相差巨大，所以肯定要离散化。
- 二维线段树维护？
 - MLE+TLE
- 二维树状数组+Hash？
 - Hash常数过大
 - 空间怎么开？？



[BOI2007] MOKIA

- 和之前的想法类似，定义操作 $Solve(L,R)$
- $Solve(L,R)$ 应当能够处理 $[L,R]$ 之间的所有操作
- $Solve(L,R)$
 - $Solve(l,mid)$
 - 处理 $[l,mid]$ 中操作对 $[mid+1,r]$ 中操作的影响
 - $Solve(mid+1,r)$
- 如何处理？



[BOI2007] MOKIA

- 前半部分的Add对后半部分的Query造成的影响
- 给定带权点集 $P=(X_i, Y_i)$, Q 个询问 (x_0, y_0, x_1, y_1) , 对于每个询问, 输出在对应矩形内的点权之和。
 - 在列上对询问进行差分, 将一个询问拆成2个
 - 所有点和询问按 Y 排序, 线段树维护
 - 在两维上对询问进行差分, 将一个询问拆成4个
 - 所有点和询问按 Y 排序, 树状数组维护
- $T(n)=2T(n/2)+O(n\log n)$
- $T(n)=O(n\log^2 n)$



[VIOLET 3] 天使玩偶

- 维护二维点集 P ，支持以下两个操作
 - (1) 插入点 (x,y)
 - (2) 给定询问 (x,y) ，求点集中离询问点最近的点
- 距离定义为曼哈顿距离
- $\text{Dis}(P1,P2) = |x1-x2| + |y1-y2|$
- $N,m \leq 300000$
- $X,y \leq 1000000$
- k-d树能不能做



[VIOLET 3] 天使玩偶

- 去除 $\text{Dis}(P1, P2)$ 的绝对值符号
 - 分4种情况讨论：左上，左下，右上，右下
 - 只需要考虑一种情况（答案在询问的左下）
- 维护点集 P ，支持以下操作
- (1) 将 (x, y) 插入点集
- (2) 给定询问 (x, y) ，求满足 $\text{dis}(p1, p2) = (x - x') + (y - y') = x + y - (x' + y')$ 最小的点
 - 问题转为求 $x' + y'$ 最大的点
- 没有操作1的情况
 - 对 x 排序，对 y 维护树状数组



[VIOLET 3] 天使玩偶

- 定义操作 $\text{Solve}(l,r)$ ，处理 $[l,r]$ 之间的询问
- $\text{Solve}(l,r)$
 - $\text{Solve}(l,\text{mid})$
 - 考虑 $[l,\text{mid}]$ 中的点对 $[\text{mid}+1,r]$ 中询问的影响
 - $\text{Solve}(\text{mid}+1,r)$
- 给定带权点集 $P(x,y)$ ，权值为 $x+y$ ，给出 Q 个询问 (x,y) ，查找 $x' \leq x, y' \leq y$ 的最小 $x'+y'$ 。
 - 退化为没有操作 1 的情况
 - 按 X 排序，对 Y 维护树状数组
- $T(n)=2T(n/2)+O(n\log n), T(n)=O(n\log^2 n)$



2D PARTIAL ORDER

- 有N个人，每个人有两种能力值 P_i, Q_i 。
- 如果 $P_i > P_j \ \&\& \ Q_i > Q_j$ ，称I比J有能力
- 现在要求出最长的一个序列 $A=(A_1, A_2, \dots, A_t)$ ，满足 A_i 比 A_{i+1} 有能力
- $N \leq 100000$ 。
- 为了简单起见，P和Q都是1到N的排列。
- 把人按照 P_i 排序，问题变为求序列 Q_i 的LIS
- $F[i] = \text{Max}(\{F[j] \mid j < i \ \&\& \ Q[j] < Q[i]\}) + 1$
- 用数据结构维护，做到 $O(n \log n)$.



3D PARTIAL ORDER

- 有 N 个人，每个人有三种能力值 P_i, Q_i, R_i 。
- 如果 $P_i > P_j \ \&\& \ Q_i > Q_j \ \&\& \ R_i > R_j$ ，称 I 比 J 有能力
- 现在要求出最长的一个序列 $A=(A_1, A_2, \dots, A_t)$ ，满足 A_i 比 A_{i+1} 有能力

- $N \leq 40000$ 。
- 为了简单起见， P, Q, R 都是1到 n 的排列



3D PARTIAL ORDER

- 首先可以按照 P_i 把人排个序。
- 现在要求的是满足 $i < j, Q_i < Q_j, R_i < R_j$ 的最长序列。
- 用 $F[i]$ 表示以第 i 个人结尾的最长序列
- $F[i] = \text{Max}\{F[j] \mid j < i, Q_j < Q_i, R_j < R_i\} + 1$
- 怎么搞？
- 线段树套平衡树/可持久化线段树
- $O(n \log^2 n)$



3D PARTIAL ORDER

- 尝试在这个问题上进行分治。
- 定义过程 $Solve(l,r)$ ，能够得到 $F[l]..F[r]$ 的值
- $Solve(l,r)$
 - $Solve(l,mid)$
 - 处理 $[l,mid]$ 中元素对 $[mid+1,r]$ 中 $F[x]$ 取值的影响
 - $Solve(mid+1,r)$
- $F[x] = \text{Max}\{F[j] \mid j < x, Q_j < Q_x, R_j < R_x\} + 1$
 - 1) x 在 $[l,mid]$ 中：集体处理
 - 2) x 在 $[mid+1,r]$ 中：由递归解决



3D PARTIAL ORDER

- 处理 $[l, mid]$ 中元素对 $[mid+1, r]$ 中 $F[x]$ 取值的影响
- 维护带权点集 $X=(Q_i, R_i)$ ($l \leq i \leq mid$), 权值 $F[i]$
- 支持询问: 给定点 (Q_j, R_j) ($mid+1 \leq j \leq r$)
- 在点集 X 中寻找一个点 (Q_i, R_i) 使得 $Q_i < Q_j$ 且 $R_i < R_j$, 满足以上条件的点中取权值最大的。
- 离线处理
 - 将所有点和询问按 Q_i 排序, 按 Q_i 顺序处理
 - 维护能够在一个位置填入数字和查询区间最大值的数据结构
 - 线段树或者平衡树



3D PARTIAL ORDER

○ 解法总结

- 第一维：排序
- 第二维：分治
- 第三维：离线，数据结构

○ 时间复杂度分析

- $T(n)=2T(n/2)+O(n\log n)$
- $T(n)=O(n\log^2 n)$

○ 再加一维？

○ 先考虑一个简单情况。



SIMPLIFIED 4D PARTIAL ORDER

- 有N个人，每个人有四种能力值 P_i, Q_i, R_i, S_i 。
- 如果 $P_i > P_j \ \&\& \ Q_i > Q_j \ \&\& \ R_i > R_j \ \&\& \ S_i > S_j$ ，称I比J有能力
- 对每一个人，输出任意一个比他有能力的人编号，或声明没有人比他有能力。

- $N \leq 40000$
- 简单起见，P, Q, R, S都是1-n的排列。
- 树套树套树？
 - 怎么写.....
- 树套树？



SIMPLIFIED 4D PARTIAL ORDER

- 首先把元素按 P_i 排序。
- 对每个 i ，要判断是否有一个 j 满足 $j < i, Q_j < Q_i, R_j < R_i, S_j < S_i$.
- 条件太多了，不好做。
- 问题等价于 $\text{Min}(S_j \mid j < i, Q_j < Q_i, R_j < R_i) < S_i$
- 求 $\text{Min}(S_j \mid j < i, Q_j < Q_i, R_j < R_i)$
- 回忆上一题
 - $F[i] = \text{Max}\{F[j] \mid j < i, Q_j < Q_i, R_j < R_i\}$
- 用相同方法处理即可。



4D PARTIAL ORDER

- 有N个人，每个人有三种能力值 P_i, Q_i, R_i, S_i 。
- 如果 $P_i > P_j \ \&\& \ Q_i > Q_j \ \&\& \ R_i > R_j \ \&\& \ S_i > S_j$ ，称I比J有能力
- 现在要求出最长的一个序列 $A=(A_1, A_2, \dots, A_t)$ ，满足 A_i 比 A_{i+1} 有能力
- $N \leq 20000$
- 树套树套树？
- 树套树？



4D PARTIAL ORDER

- 将元素按照 P_i 排序。
- 用 $F[i]$ 表示以第 i 个人结尾的最长序列
- $F[i] = \text{Max}\{F[j] \mid j < i, Q_j < Q_i, R_j < R_i, S_j < S_i\} + 1$
- 没有办法转化了。
- 直接做：
 - 树套树套树->TLE+MLE
 - Hash动态节点，三维树状数组.....->?
- 我们尝试一下分治。



4D PARTIAL ORDER

- 定义 $Solve(l,r)$ ，解决 $F[l]$ 到 $F[r]$ 的问题。
 - $Solve(l,mid)$
 - 考虑 $[l,mid]$ 中的点对 $[mid+1,r]$ 中 $F[]$ 取值的影响
 - $Solve(mid+1,r)$
- 整体考虑
 - 给定带权点集 $X=(Q_i,R_i,S_i) [1 \leq i \leq mid]$ ，权值 $F[i]$
 - 给定 $(r-mid)$ 个询问 $(Q_j,R_j,S_j) [mid+1 \leq j \leq r]$
 - 对于每个询问，回答点集中满足 $Q_i < Q_j, R_i < R_j, S_i < S_j$ 的最大权值。
- 离线操作
 - 按 Q_i 排序。询问满足 $R_i < R_j, S_i < S_j$ 的点的最大权值



4D PARTIAL ORDER

- 询问满足 $R_i < R_j, S_i < S_j$ 的最大权值
 - 线段树套平衡树?
 - 树状数组套平衡树?
- 再分治一次
- 定义分治过程 $Solve2(l, r)$, 用于处理 $Solve(l, r)$ 中 $[l, mid]$ 中的点对 $[mid+1, r]$ 中 $F[]$ 值的影响。
- $Solve2(l, r)$
 - $Solve2(l, mid)$
 - 处理 (l, mid) 中点对 $(mid+1, r)$ 中询问的影响
 - $Solve2(mid+1, r)$
- 和 $Solve(l, r)$ 有什么区别?



4D PARTIAL ORDER

- Solve(l,r)
 - Solve(l,mid)
 - 创建一个[l,r]的副本并按照Q[i]排序
 - Solve2(l,r)
 - Solve(mid+1,r)
- Solve2()的工作
 - 维护带权点集 $X=(R_i, S_i)$ ，支持两个操作
 - 1) 将一个点 (R_i, S_i) 插入X，权值F[i] ($1 \leq i \leq \text{mid}$)
 - 2) 给出询问 (R_j, S_j) ，求一个权值最大且满足 $R_i < R_j, S_i < S_j$ 的点
- 在Solve2()上定义分治过程。



4D PARTIAL ORDER

- Solve2(l,r)
 - Solve2(l,mid)
 - 处理 $[l, \text{mid}]$ 的点对 $[\text{mid}+1, r]$ 的询问的影响
 - Solve2(mid+1,r)
- 维护带权点集 $X=(R_i, S_i)$ ($1 \leq i \leq \text{mid}$), 权值 $F[i]$
 - 支持询问: 给定点 (R_j, S_j) ($\text{mid}+1 \leq j \leq r$)
 - 在点集 X 中寻找一个点 (R_i, S_i) 使得 $R_i < R_j$ 且 $S_i < S_j$, 满足以上条件的点中取权值最大的。
- 很眼熟?
- 离线处理。
 - 同三维情况, 排序后树状数组或线段树维护。



4D PARTIAL ORDER

- 时间复杂度分析
- 定义 $T_2(n)$ 为 $Solve_2(l,r)$ 的时间复杂度。
- $T_2(n) = 2T_2(n/2) + O(n \log n)$
- $T_2(n) = O(n \log^2 n)$
- 定义 $T(n)$ 为 $Solve(l,r)$ 的时间复杂度。
- $T(n) = 2T(n/2) + T_2(n)$
- $= 2T(n/2) + O(n \log^2 n)$
- $T(n) = O(n \log^3 n)$



100D PARTIAL ORDER

- 有 N 个人，每个人有100种能力值 $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{i100}$ 。
- 如果对于 $1 \leq k \leq 100$ 有 $P_{ik} > P_{jk}$ ，称 I 比 J 有能力
- 现在要求出最长的一个序列 $A=(A_1, A_2, \dots, A_t)$ ，满足 A_i 比 A_{i+1} 有能力

- $N \leq 500$ 。
- 简单起见， $P_{x1}, P_{x2}, \dots, P_{x100}$ 都是1到 n 的排列。

- 99个log?
- 还想分治么?



100D PARTIAL ORDER

- 枚举每对 (i,j) , 判断 i 是不是比 j 有能力
- 在构造出的图上求最长链
- $O(100 * n^2)$



[POI2011] METEOR

- 有 N 个国家开发小行星的轨道，设立了 M 个观察站。
- 观察站从1到 M 编号，每个观察站恰好属于一个国家。
- 第 I 和第 $I+1$ 个观察站相邻，第 M 个和第1个相邻。
- 科学家预测在接下来的时间里会依次发生 K 场流星雨。
- 每场流星雨有一个区间 $[L_i, R_i]$ ，表示流星雨波及的区间是从第 L_i 个观察站顺时针数到第 R_i 个。也就是说如果 $L_i > R_i$ ，指的是 $L_i, L_i+1, \dots, m, 1, 2, \dots, R_i-1, R_i$ 。
- 每场流星雨有一个数量 A_i ，表示这场流星雨将会为波及的每个观察站提供 A_i 单位的陨石。
- 每个国家都拥有陨石收集数的目标 W_i 。对于每个国家，输出它在第几场流星雨后可以达到目标。
- $N, M, K \leq 3 \cdot 10^5, A_i, W_i \leq 10^9$



[POI2011] METEOR

- 样例输入

3 5 // 国家个数N, 空间站个数M

1 3 2 1 3 // 每个空间站的归属 O_i

10 5 7 // 每个国家的目标 W_i

3 // 流星雨数量K

4 2 4 // L_i, R_i 表示影响区间, A_i 表示提供数量

1 3 1

3 5 2

- 样例输出

3

NIE // NIE表示达不到任务

1



[POI2011] METEOR

- 维护观察站信息
 - 线段树+Lazy-Tag
 - 差分+树状数组
- 只有1个国家的情况
 - 每次流星雨后判断可行性
 - $O(t*k*\log m)$
 - T是国家拥有的空间站数目
- 二分答案
 - 需要模拟 $O(N)$ 次流星雨后判断可行性
 - $O(t*k*\log k*\log m)$
 - 为什么?



[POI2011] METEOR

- 引入分治思想
- $Solve(l,r)$ 用于解决所有答案落在 $[L,R]$ 中的询问
 - 两个参数够不够?
- $Solve(l,r,S)$
 - S 是一个询问集合，表示需要处理的询问集合
- $Solve(l,r,S)$
 - 分割 S ， $S1$ 的答案在 $[l,mid]$ ， $S2$ 的答案在 $[mid+1,r]$
 - $Solve(l,mid,S1)$
 - $Solve(mid+1,r,S2)$



[POI2011] METEOR

- 分割集合S
- 1) 用线段树模拟时刻Mid的情况
 - Mid是 $O(k)$ 级别的
 - $O(k \log m)$
- 2) 对于S中每个国家，查询已收集到的陨石数目
 - $O(\sum t * \log m)$
 - 由于 $\sum t(\text{全集})=n$ ，一层递归的总复杂度 $O(n \log m)$
 - 这一步的总复杂度是 $O(n \log k \log m)$
- (1)的时间复杂度？
 - $T(x)=2T(x/2)+O(k \log m)$
 - $T(x)=O(k \log x \log m) \rightarrow AC?$
 - $T(x)=O(x * k \log m)!$



[POI2011] METEOR

- TLE的原因在于(1)的单步复杂度和递归长度 x 无关。
- 维护全局线段树
- $O(\log m)$ 模拟和**撤销**一次流星雨
 - 在运行 $Solve(l,r)$ 之前，线段树存储了第1次到第 $l-1$ 次流星雨的情况
 - 在运行 $Solve(l,r)$ 之后，线段树存储了第1次到第 r 次流星雨的情况
- 用 $+[l,r]$ 表示模拟 $[l,r]$ 这段流星雨， $-[l,r]$ 表示撤销
- 如何写 $Solve(l,r,S)$?



[POI2011] METEOR

- $Solve(l, r, S)$
 - $+ [l, mid]$
 - 分割点集 S
 - $- [l, mid]$
 - $Solve(l, mid, S1)$
 - $Solve(mid+1, r, S2)$
- 模拟流星雨的时间复杂度
 - $T(x) = 2T(x/2) + O(x \log m)$
 - $T(x) = O(x \log x \log m)$
- 整个算法的复杂度是 $O(k \log k \log m + n \log k \log m)$ 。
- AC。



[POI2011] METEOR

- 并行分治
- 对于每个国家的询问，一开始的答案区间都是 $[1, n]$ 。
- 同时对所有国家进行二分查询
- 主算法Solve执行一次整体二分，调用 $\log k$ 次
 - 每个国家答案区间的中点是 $midX$
 - 询问第 X 个国家在 $midX$ 时是否收集到 W_x 的陨石
- 对 $midX$ 排序，离线处理
 - 顺序模拟所有流星雨，到第 $midX$ 个时统计答案
 - 如果答案 $< W_x$ 那么区间变成 $[mid+1, r]$ 否则 $[l, mid]$
- $\log k$ 次算法后，每个答案区间长度为1，直接输出
- $T(n) = \log k * (k * \log m + n * \log n)$



矩阵乘法（梁盾）

- 给定 $n*n$ 的矩阵A
- 给定Q个询问 $(x1,y1,x2,y2,k)$ ，询问子矩形 $[x1,y1] \sim [x2,y2]$ 中的K小数。
- $N \leq 500$
- $Q \leq 60000$
- 允许离线。



矩阵乘法（梁盾）

○ 数据结构

- 线段树套线段树套树状数组.....

○ 单一询问的情况

- 二分答案，判定可行性
- 给定矩阵 $D[i,j]=(A[i,j] \geq \text{mid})$ ，判定矩形内权值是否 $>k$

○ 准备分治

- $\text{Solve}(l,r,S)$ 处理所有答案落在 $[l,r]$ 之间的询问
- 分割 S 到 $\text{Solve}(l,\text{mid},S1)$ 和 $\text{Solve}(\text{mid}+1,r,S2)$ 中

○ 构造 $D[i,j](\text{mid})$

- 维护全局二维树状数组
- 需要加的点只有 $(i,j) \mid L \leq A[i,j] \leq \text{mid}$



矩阵乘法（梁盾）

○ 时间复杂度统计

- 单次操作可以视为 $\log^2 n$
- $F(n) = 2F(n/2) + O(\log^2 n)$
- $F(n) = O(n \log^3 n)$

○ 优化？

○ 规避二维数据结构

- 将询问和插入点集按 x 进行归并排序，维护 y 的树状数组
- $F(n) = 2F(n/2) + O(n \log n)$
- $F(n) = O(n \log^2 n)$



[ZJOI2013] K大数查询

- 有 n 个位置和 m 个操作。操作有两种，每次操作如果是 $1\ a\ b\ c$ 的形式，表示往第 a 个位置到第 b 个位置每个位置加入一个数 c 。如果操作形如 $2\ a\ b\ c$ 的形式，表示询问从第 a 个位置到第 b 个位置，第 c 大的数是多少。
- $n, m \leq 50000$
- 操作1中， $c \leq n$
- 操作2中， $c \leq \text{maxlongint}$



[ZJOI2013] K大数查询

- 2 5
- 1 1 2 1
- 1 1 2 2
- 2 1 1 2
- 2 1 1 1
- 2 1 2 3
- **【样例输出】**
- 1
- 2
- 1
- 第一个操作后位置1的数只有1，位置2的数也只有1。第二个操作后位置1的数有1、2，位置2的数也有1、2。第三次询问位置1到位置1第2大的数是1。第四次询问位置1到位置1第1大的数是2。第五次询问位置1到位置2第3大的数是1。



[ZJOI2013] K大数查询

- 常规的数据结构
 - 线段树套平衡树
 - 二分答案?
 - 外层线段树表示插入的数大小，内层表示坐标
 - 动态分配
- 单一询问的情况
 - 二分答案+维护线段树等等
- 准备分治
 - $\text{Solve}(l,r,S)$ 用于处理答案落在 $[l,r]$ 之间的所有询问
 - 分割 S 集合



[ZJOI2013] K大数查询

○ 分割集合

- 已知所有询问在L处的回答，求在MID处的回答
- 所有的操作1中，只有 $l \leq c \leq mid$ 的有作用
- 按时间排序后维护树状数组

○ 时间复杂度

- 单步的复杂度均摊后不超过 $O(n \log n)$ 级别
- $T(n) = 2T(n/2) + O(n \log n)$
- $T(n) = O(n \log^2 n)$

○ 总结一下上面三题的共性



PACKAGE

- 有 N 个物品，每个物品的重量是 W_i ,价值是 G_i
- 每个物品只能取一个
- 给定 Q 个询问，每个询问由两个数 (X, I) 组成
- 给定最大容量为 X 的背包，使用除了第 i 件物品以外的所有物品，能够得到的最大价值之和

- $N \leq 100$
- 询问中的 $X \leq 10000$
- $Q \leq 1000000$

- 怎么做？



PACKAGE

- 离线操作
- 只有1个询问/所有询问的I相同的情况
 - 0/1背包
 - $O(nm)$
- 维护0/1背包
 - $O(m)$ 将一个物品放入背包。
 - 同样，定义 $+[l,r]$ 表示把l到r的物品放入背包
 - $+[l,r]$ 的复杂度是 $O(nm)$
- 准备分治
 - 对重量分治
 - 对物品ID分治



PACKAGE

- 定义 $\text{Solve}(l,r)$, 用于处理所有 $l \leq i \leq r$ 的询问
- 定义 $\text{Solve}(l,r,S)$, 用于处理所有 $l \leq i \leq r$ 的询问
 - S 是一个 0/1 背包, 放进了除了 $[l,r]$ 之外的其他物品
 - $\text{Solve}(L,L,S)$ 时, 回答所有 $I=L$ 的询问
- $\text{Solve}(l,r,S)$
 - $\text{Solve}(l,\text{mid},S+[\text{mid}+1,r])$
 - $\text{Solve}(\text{mid}+1,r,S+[l,\text{mid}])$
- 时间复杂度分析
 - $T(n)=2T(n/2)+O(nm)$
 - $T(n)=O(nm \log n)$



[HNOI2010] CITY

- 有一个N个点M条边的无向图，每条边有边权 W_i
- 给定Q个操作 (E_i, Z_i) ，表示将第 E_i 条边的费用改为 Z_i
- 每次操作之后，输出当前无向图的最小生成树权值

- $N \leq 20000, M \leq 50000, Q \leq 50000, W_i, Z_i \leq 10^8$

- NO SPOILERS PLZ.

- 特殊情况：修改后边权不加。



[HNOI2010] CITY

- 修改后边权不加的情况
- 修改 (x,y) 的权值时，最小生成树的边构成
 - 1) 不变
 - 2) (x,y) 加入最小生成树，另外一条边退出
- 2)发生的条件
 - 原MST上 x 到 y 路径上的最大值大于 (x,y) 的权值
- 维护MST
 - 支持加入一条边，删除一条边，查询路径最大值
 - Link-Cut Tree维护无根树



[HNOI2010] CITY

- 修改后边权不减的情况
- ?
- 预处理之后倒着做就行了。
- 不管怎么样，这个问题是**离线**的



[HNOI2010] CITY

- 能不能对操作序列进行分治？
- 定义 $Solve(l,r)$ ，用于处理L到R的操作并得到答案
- $Solve(l,r)$
 - $Solve(l,mid)$
 - 处理 $[l,mid]$ 的加边对 $[mid+1,r]$ 的询问的影响
 - $Solve(mid+1,r)$
- 一条边对一个询问的影响难以表示。



[HNOI2010] CITY

- Solve(l,r)
 - Prepare(l,r)
 - Solve(l,mid)
 - Solve(mid+1,r)
- 对[l,r]分治的优势：可能改变的边权数是 $O(r-l)$ ，可能远小于 $O(m)$
 - 区间里的MST查询结果有相似性。



[HNOI2010] CITY: STEP 1

- 假设 G 是一个带权无向图的边集， S 是 G 的一个子集。
- 将 S 中边权设为 $+\text{inf}$ 后， T 是图 G 的最小生成树。
 - 也可以说 T 是 $G-S$ 的MST
- 定理1：不管 S 中的边权怎么变化， G 的最小生成树 T' 将属于 $T \cup S$ 。
 - 对于任意一条不属于 $T \cup S$ 的边，我们可以在 T 中找到链接它两端的一条路径。
 - 由于这些边取值都和 S 无关，无论 S 权值怎么更改，这个环上这条边最大，不会进入MST



[HNOI2010] CITY: STEP 1

- 假设 G 是一个带权无向图的边集， S 是 G 的一个子集。
- 将 S 中边权设为 $+\infty$ 后， T 是图 G 的最小生成树。
 - 也可以说 T 是 $G-S$ 的MST
- 定理2：在定理1的前提下，我们可以在不影响 T' 的情况下，将 G 的**边数**缩减到 $n+|s|-1$ 以下。
 - 直接运用定理1， $G-S$ 的最小生成树最多有 $N-1$ 条边。
 - 其他的边不可能在 T' 中，我们可以安全地删除掉。
- 这一步被称为Reduction，效果是减少了 G 的边数。
- 复杂度同MST是 $O(m\log m)$ ， $m=|G|$ 。



[HNOI2010] CITY: STEP 2

- 假设 G 是一个带权无向图的边集， S 是 G 的一个子集。
- 将 S 中边权设为 $-\text{inf}$ 后， T 是图 G 的最小生成树。
- 定理3：不管 S 中的边权怎么变化。 G 的最小生成树 T' 将**包含** $T-S$ 。
 - 考虑将 S 的权值一条边一条边提升的情况。
 - 每提升一条边权值，MST要么不变，要么就是 S 中的一条边离开，一条新边加入。
 - 无论如何， $T-S$ 这些边都不会离开MST。



[HNOI2010] CITY: STEP 2

- 假设 G 是一个带权无向图的边集， S 是 G 的一个子集。
- 将 S 中边权设为 $-\text{inf}$ 后， T 是图 G 的最小生成树。
- 定理4：在定理3的前提下，我们可以在不影响 T' 的情况下，将 G 的点数缩减到 $|s|+1$ 以下。
 - 假设已经对图进行了Reduction。
 - 根据定理3，由于 $T-S$ 的边不离开MST，我们可以将这些边连接的点合并为联通分量，将联通分量视为节点。
 - 之后根据节点归属更新边表即可。
- 这一步被称为Contraction，效果是减少了 G 的点数。
- 复杂度同MST， $O(m \log m)$



[HNOI2010] CITY

- 根据上面的推论，我们可以得到结论：
- 给定一个图 G 和操作序列 S ，可以在 $O(m \log m)$ 时间内通过reduction-contraction将图的边数缩小到 $n + |s| - 1$ ，点数缩小到 $|s| + 1$ 而保持求解过程的正确性。
- 定义分治过程 $Solve(l, r)$ 用于解决 L 到 R 区间的问题。
 - 为了方便起见，我们将图 G 作为参数传递。
- 定义分治过程 $Solve(l, r, G)$ 解决 L 到 R 区间的问题。



[HNOI2010] CITY

- $Solve(l, r, G)$
 - $Reduction(G)$
 - $Contraction(G)$
 - $Solve(l, mid, G)$
 - $Solve(mid+1, r, G)$
 - $Recover(G)$ //用于撤销Reduction-Contraction的影响
- 边界情况: $Solve(l, l, G)$
 - 2个点和1条边!
 - 直接判断即可



[HNOI2010] CITY

- 时间复杂度分析
- 在执行 $\text{Solve}(l, r, G)$ 时， G 的点数和边数都是 $O(r-l)$ 的
 - 在第一次分治之前，对原图做一次R-C
 - 分治之后由归纳假设和R-C过程易得原证明成立
- R-C(n)的时间复杂度是 $O(n \log n)$
- Recover的复杂度不会高于R-C(n)的复杂度
- $T(n) = 2T(n/2) + O(n \log n)$



CONCLUSION

- 基于时间（或阶段、顺序）分治
- 牺牲时间复杂度，将在线问题离线化
- 分治的递归过程用于解决段内问题，两段间问题由分治主过程解决
- 在特殊场合有很好的效果

- 优势：代码简短易读，效率不错
- 劣势：递归过程导致常数变大，有时候需要去递归

- （能够代替树套树这种数据结构的还有可持久化数据结构，有兴趣的同学可以去研究下。）



[FJOI2012] POINT

- 原题目较长，剔除边界情况后抽象成下列问题：
- 有长度为 N 的数组，开始时是空的。
- 执行 N 个操作 $P_i Q_i$ ，表示在第 P_i 位填上 Q_i 。
- P_i, Q_i 是1到 n 的排列。
- 每个操作之后，输出序列的逆序对个数。 $n \leq 50000$

- 用树套树、块状链表或者今天讲的分治方法，很容易做到 $O(n \log^2 n)$ 或相近的复杂度。考场上前两者都只拿到了50分。
- 有没有低于 $O(n \log^2 n)$ 的方法？比如 $O(n \log n)$ ？

