应用组合数学

第9讲 容斥原理

张坤龙

zhangkl@tju.edu.cn

目录

集合*N*， *n*个属性

- 容斥原理
  - 求具有*n*个属性之一（并集）的元素的个数
  - 求不具有*n*个属性中任何一个（交集）的元素的个数

- 广义容斥原理
  - 求恰好具有*m*个属性的元素的个数

容斥原理

- 并集的计数

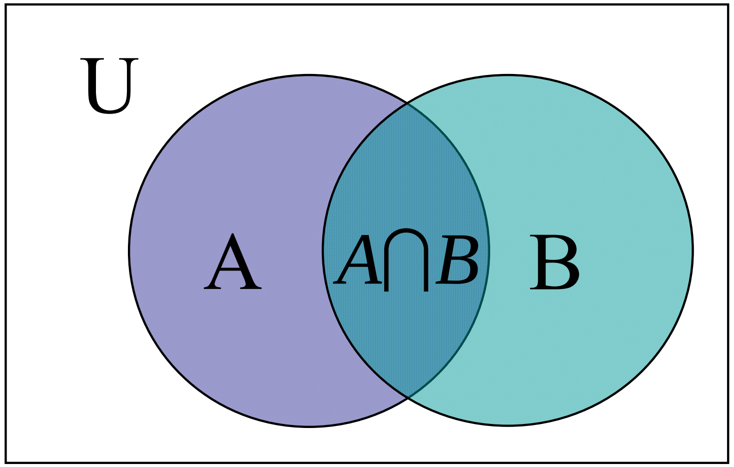
- 交集的计数

- 容斥原理的应用
  - 有禁区的排列

两个集合的并集

[定理1]

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



[例1] 求不超过20的正整数中2或3的倍数的个数

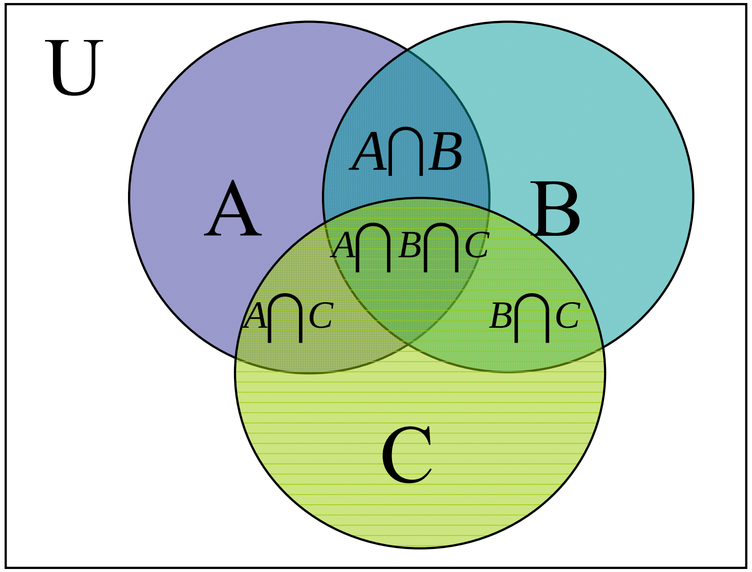
解：令A为2的倍数集合，B为3的倍数集合

$$\left.\begin{aligned} |A| &= \lfloor 20/2 \rfloor = 10 \\ |B| &= \lfloor 20/3 \rfloor = 6 \\ |A \cap B| &= \lfloor 20/6 \rfloor = 3 \end{aligned}\right\} \quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 13$$

三个集合的并集

[定理2]

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$



[例2] 一个学校只有三门课程：数学、物理、化学。已知修这三门课的学生分别有170、130、120人；同时修数学物理两门课的学生45人；同时修数学化学的20人；同时修物理化学的22人。同时修三门课程的3人。问这学校共有多少学生，假设每个学生至少修一门课？

解:$|M\cup P\cup C| = 170+130+120-45-20-22+3=336$

多个集合的并集

[定理3] 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是有限集合，则

$$|A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \bigcap A_j|$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \bigcap A_j \bigcap A_k|$$

$$-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1} |A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n|$$

证明：数学归纳法

De Morgan定理

[定理4] 若A,B是U的子集，则

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$$

$$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$$

[定理5] 若$A_1,A_2,\ldots A_n$是U的子集，则

$$\overline{A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n}=\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_n}$$

$$\overline{A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_n}=\overline{A_1}\bigcup\overline{A_2}\bigcup\cdots\bigcup\overline{A_n}$$

Sylvester公式

[定理6] 给定集合N和具有性质i的集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$，则

$$|\overline{A_1} \bigcap \overline{A_2} \bigcap \cdots \bigcap \overline{A_n}| = |N| - \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \bigcap A_j|$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \bigcap A_j \bigcap A_k|$$

$$+ \cdots$$

$$+ (-1)^n |A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n|$$

有限制的排列

[例3] 求a,b,c,d,e,f六个字母的全排列中不允许出现ace和df图象的排列数。

解：设A为ace作为一个元素出现的排列集，B为 df作为一个元素出现的排列集，则

$$\left.\begin{aligned}&|N|=6!\\&|A|=4!\\&|B|=5!\\&|A\cap B|=3!\end{aligned}\right\}\quad |\overline{A}\bigcap\overline{B}|=6!-(5!+4!)+3!=582$$

[例4] 4个x、3个y、2个z的全排列中，求不出现xxxx、yyy、zz图象的排列数。

解:所有出现xxxx图象的排列集合记为A_1，出现yyy图象的排列集合记为A_2，出现zz图象的排列集合记为A_3,则

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| &= |N|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|) \\
&\quad +(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)-|A_1\cap A_2\cap A_3| \\
&= P(9;4,3,2)-[P(6;1,3,2)+P(7;4,1,2)+P(8;4,3,1)] \\
&\quad +[P(4;1,1,2)+P(5;1,3,1)+P(6;4,1,1)]-P(3;1,1,1) \\
&= 1260-(60+105+280)+(12+20+30)-6=871
\end{aligned}
$$

Eratosthenes筛法

[例5] 求不超过120的素数的个数。

解：不超过120的合数必然是2、3、5、7的倍数，且不超过120的合数的因子不可能都超过11。设A_i为不超过120的数i的倍数集，i=2，3，5，7。

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_7}| &= |N| \\
&-(|A_2|+|A_3|+|A_5|+|A_7|) \\
&+(|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_5|+|A_2\cap A_7|+|A_3\cap A_5|+|A_3\cap A_7|+|A_5\cap A_7|) \\
&-(|A_2\cap A_3\cap A_5|+|A_2\cap A_3\cap A_7|+|A_2\cap A_5\cap A_7|+|A_3\cap A_5\cap A_7|) \\
&+|A_2\cap A_3\cap A_5\cap A_7|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 120 \\
&\quad -\left(\left\lfloor\frac{120}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{7}\right\rfloor\right) \\
&\quad +\left(\left\lfloor\frac{120}{2\times 3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{2\times 5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{2\times 7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{3\times 5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{3\times 7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{5\times 7}\right\rfloor\right) \\
&\quad -\left(\left\lfloor\frac{120}{2\times 3\times 5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{2\times 3\times 7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{2\times 5\times 7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{3\times 5\times 7}\right\rfloor\right) \\
&\quad +\left\lfloor\frac{120}{2\times 3\times 5\times 7}\right\rfloor = 27
\end{aligned}
$$

由于2，3，5，7是素数，1不是素数，故所求的不超过120的素数个数为：27+4-1=30

欧拉函数 $\phi(n)$

[例6]欧拉函数$\phi(n)$是小于等于n且与n互素的正整数的个数,假设

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$,则有

$$\phi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

证明：设A_i为1到n之间p_i的倍数的集合,$i=1,2,\cdots,k$,则

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \bigcap \overline{A_2} \bigcap \cdots \bigcap \overline{A_k}|$$

$$= n - \sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j>i}\frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j>i}\sum_{h>j}\frac{n}{p_i p_j p_h} + \cdots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

$$= n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

错排问题-容斥原理

［例7］ 求整数1,2,…,n的全排列中所有i都不在第i个位置上的排列的个数，i=1,2,…,n。

解：设A_i表示i在第i个位置上的所有排列，则所求的排列数为：

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_n}| = |N| && = n! \\
&\quad -(|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|) && -C(n,1)\cdot(n-1)! \\
&\quad +(|A_1\bigcap A_2|+\cdots+|A_{n-1}\bigcap A_n|) && +C(n,2)\cdot(n-2)! \\
&\quad -\cdots && -\cdots \\
&\quad +(-1)^n|A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_n| && +(-1)^n C(n,n)
\end{aligned}
$$

$$
|\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_n}| = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right) = D_n
$$

有禁区的排列

[例8]　对于整数1,2,3,4的全排列P=$P_1 P_2 P_3 P_4$，规定 $P_1 \neq 3$，$P_2 \neq 1$、4，$P_3 \neq 2$、4，$P_4 \neq 2$。

	1	2	3	4
P_1			×	
P_2	×			×
P_3		×		×
P_4		×		

问题可以转换为在有禁区的棋盘上放置车，使得每行每列有且只有一只车

棋盘多项式

将若干只车放置在一个*n*x*n*的棋盘B上，要求每行每列有且只有一个车，记r_k(B)表示棋盘B上放置*k*只车的不同方案数，则称多项式

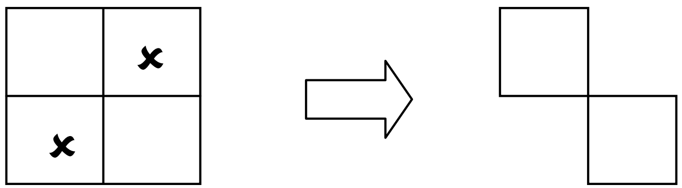
$$R(B)=\sum_{k\geq 0} r_k(B)x^k = r_0(B)+r_1(B)x+r_2(B)x^2+\cdots$$

为棋盘B的棋盘多项式。

由于在*n*x*n*的棋盘B上最多可以放置*n*只车，因此当*k*>n时r_k(B)=0，棋盘多项式*R*(B)只有有限项。

有禁区的布局

在棋盘B上放置车时，有的位置是禁区。下面画棋盘时省略了禁区部分。

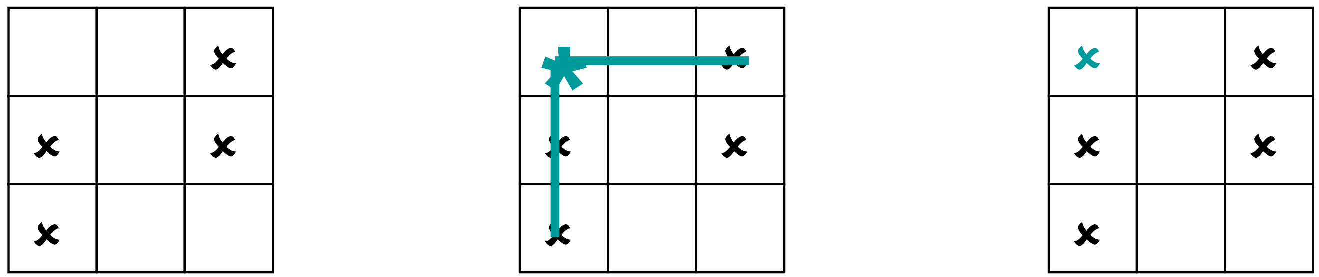


$r_0(\square)=1$，$r_1(\square)=1$； $R(\square)=1+x$

$r_0\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\right)=1$，$r_1\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\right)=2$，$r_2\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\right)=0$； $R\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\right)=1+2x$

$r_0\left(\begin{smallmatrix}\square&\\&\square\end{smallmatrix}\right)=1, r_1\left(\begin{smallmatrix}\square&\\&\square\end{smallmatrix}\right)=2, r_2\left(\begin{smallmatrix}\square&\\&\square\end{smallmatrix}\right)=1; R\left(\begin{smallmatrix}\square&\\&\square\end{smallmatrix}\right)=1+2x+x^2$

棋盘多项式的递推关系

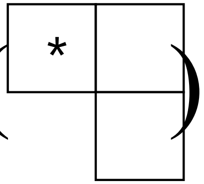
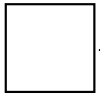
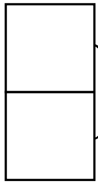


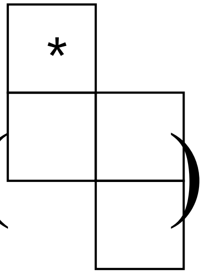
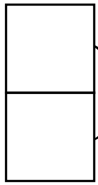
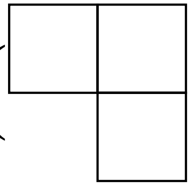
B　　　　B_i　　　　B_e

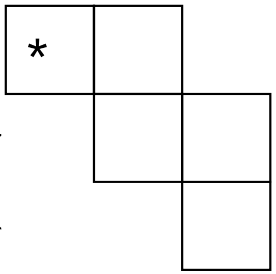
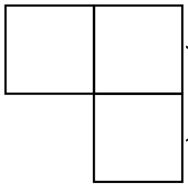
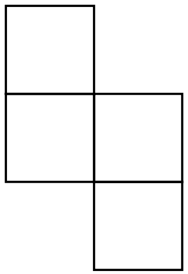
$$r_k(\mathrm{B}) = r_{k-1}(\mathrm{B}_i) + r_k(\mathrm{B}_e);\quad R(\mathrm{B}) = xR(\mathrm{B}_i) + R(\mathrm{B}_e)$$

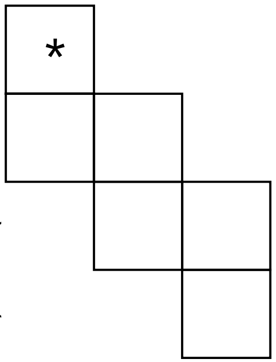
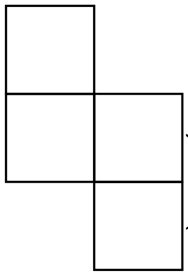
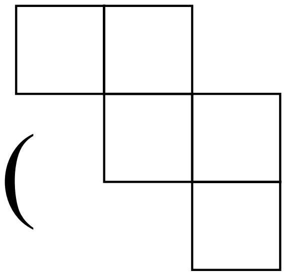
$$R\left(\begin{array}{|c|}\hline * \\ \hline \\ \hline\end{array}\right) = xR(\quad) + R\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline\end{array}\right) = x\cdot 1 + (1+x) = 1+2x$$

$$R\left(\begin{array}{|c|c}\hline * & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & \\ \cline{2-2}\end{array}\right) = xR\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline\end{array}\right) + R\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline\end{array}\right) = x(1+x) + (1+x) = 1+2x+x^2$$

$R($  $) = xR($  $) + R($  $) = x(1+x)+(1+2x) = 1+3x+x^2$

$R($  $) = xR($  $) + R($  $) = 1+4x+3x^2$

$R($  $) = xR($  $) + R($  $) = 1+5x+6x^2+x^3$

$R($  $) = xR($  $) + R($  $) = 1+6x+10x^2+4x^3$

有禁区的布局数

[定理7] 在nxn的棋盘上放置n只车，不同的方案数为

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\cdots\pm r_n$$

其中r_i是有i只车布置到禁区部分的方案数。

证明：令A_i表示第i只车放入第i行的禁区，则

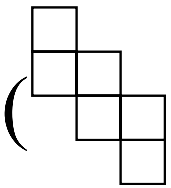
$$\begin{aligned}
&|\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_n}|=N && =n! \\
&\quad-(|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|) && -r_1(n-1)! \\
&\quad+(|A_1\bigcap A_2|+\cdots+|A_{n-1}\bigcap A_n|) && +r_2(n-2)! \\
&\quad-\cdots && -\cdots \\
&\quad\pm|A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_n| && \pm r_n
\end{aligned}$$

任务分配

[例9] G、L、W、Y四位工人，A、B、C、D四项任务。若G不能从事任务B，L不能从事任务B、C，W不能从事任务C、D，Y不能从事任务D，则有多少种可行方案使得每人从事各自力所能及的一项工作？

	A	B	C	D
G		×		
L		×	×	
W			×	×
Y				×

解：每一种分配方案相当于右图所示的有禁区的排列，由于

$R($  $)=1+6x+10x^2+4x^3$

所求的排列数为： 4!-6*3!+10*2!-4*1!-0=4

错排问题–有禁区的排列

[例10] 如图所示，可求得禁区的棋盘多项式为 $(1+x)^n$

	1	2	3	4
1	×			
2		×		
3			×	
4				×

则错排的方案数为

$$n!-C(n,1)(n-1)!+C(n,2)(n-2)!-\ldots\pm C(n,n)$$

广义容斥原理

- 广义容斥原理
- 广义容斥原理的应用
  - 多重集的r-组合
  - *n*对夫妻问题

α (m)

给定集合N和性质$A_1, A_2, \cdots, A_n$，令$\alpha(0) = |N|$,

$$\alpha(1) = \sum_{i=1}^{n} |A_i|,$$

$$\alpha(2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \bigcap A_j|$$

$$\alpha(3) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \bigcap A_j \bigcap A_k|$$

$$\cdots$$

$$\alpha(n) = |A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n|$$

则$\alpha(m)$计数了具有$m+k$个性质的元素C_m^{m+k}次。

β (m)

[广义容斥原理] 给定集合N和性质$A_1, A_2, \cdots, A_n$，令$\beta(m)$表示N中恰有m个性质的元素个数，则

$$\beta(m) = \alpha(m) - C_m^{m+1}\alpha(m+1) + C_m^{m+2}\alpha(m+2) - \cdots + (-1)^{n-m} C_m^n \alpha(n)$$

证明:1)少于m个性质的元素;2)恰有m个性质的元素;3)多于m个性质的元素,假设是$m+k$个,则在项$(-1)^i C_m^{m+i}\alpha(m+i)$中计算$(-1)^i C_m^{m+i} C_{m+i}^{m+k}$次。根据恒等式$C_k^n C_r^k = C_r^n C_{k-r}^{n-r}$,

$$(-1)^i C_m^{m+i} C_{m+i}^{m+k} = (-1)^i C_m^{m+k} C_i^k,$$

于是具有$m+k$个性质的元素被计数的总次数是

$$C_m^{m+k} C_0^k - C_m^{m+k} C_1^k + C_m^{m+k} C_2^k - \cdots \pm C_m^{m+k} C_k^k = C_m^{m+k}(C_0^k - C_1^k + C_2^k - \cdots \pm C_k^k)$$

推论：$\beta(0) = \alpha(0) - \alpha(1) + \alpha(2) - \cdots + (-1)^n \alpha(n)$

广义容斥原理-例题（1）

[例11] 某校有12个教师，已知教数学的有8位，教物理的有6位，教化学的5位；教数理的5位，教数化的4位，教理化的 3 位；教数理化的 3 位。问教其他课的有几位？只教一门课的有几位？只教两门课的有几位？

解：令教数学的教师属于A_1，教物理的属于A_2，教化学的属于A_3。则 $\alpha(0)=12$，

$\alpha(1)= =|A_1|+|A_2|+|A_3|=8+6+5=19$，

$\alpha(2)= =|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|=12$，

$\alpha(3)= =|A_1\cap A_2\cap A_3|=3$，

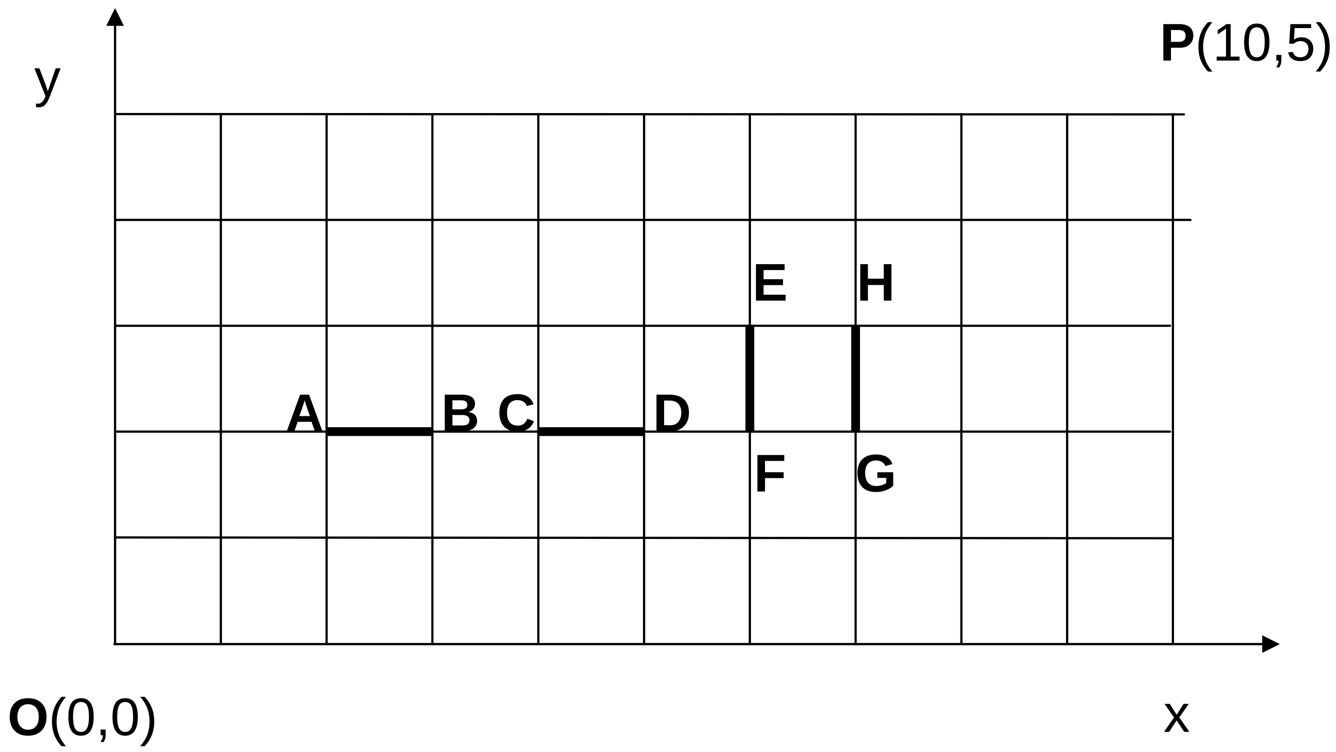
$\beta(0)=\alpha(0)-\alpha(1)+\alpha(2)-\alpha(3)=12-19+12-3=2$

$\beta(1)=\alpha(1)-2\alpha(2)+3\alpha(3)=19-2\cdot 12+3\cdot 3=4$

$\beta(2)=\alpha(2)-3\alpha(3)=12-3\cdot 3=3$

广义容斥原理-例题（2）

[例12] 求从O点到P点恰好经过AB,CD,EF,GH中任何两条路径的路径数。



解：令A_1表示从O点到P点经过AB的路径， A_2表示从O点到P点经过CD的路径，A_3表示从O点到P点经过EF的路径，A_4表示从O点到P点经过GH的路径，则

$$\alpha(2)=|A_1\bigcap A_2|+|A_1\bigcap A_3|+|A_1\bigcap A_4|+|A_2\bigcap A_3|+|A_2\bigcap A_4|+|A_3\bigcap A_4|$$

$$=C_2^4C_3^8+C_2^4C_2^6+C_2^4C_2^5+C_2^6C_2^6+C_2^6C_5^5+0=861$$

$$\alpha(3)=|A_1\bigcap A_2\bigcap A_3|+|A_1\bigcap A_2\bigcap A_4|+|A_1\bigcap A_3\bigcap A_4|+|A_2\bigcap A_3\bigcap A_4|$$

$$=C_2^4C_2^6+C_2^4C_2^5+0+0=150$$

$$\alpha(4)=|A_1\bigcap A_2\bigcap A_3\bigcap A_4|=0$$

$$\beta(2)=\alpha(2)-3\alpha(3)+6\alpha(4)=861-3\cdot150+6\cdot0=411$$

广义容斥原理-例题（3）

[例13] 证明恒等式

$$\binom{n-m}{n-k}=\binom{m}{0}\binom{n}{k}-\binom{m}{1}\binom{n-1}{k}+\binom{m}{2}\binom{n-2}{k}-\cdots\pm\binom{m}{m}\binom{n-m}{k}$$

证明：等式左边是*C*(*n*-*m*,*k*-*m*)，即从{1,2,…,*n*}中取出*k*个数，其中必定包含{1,2,...,*m*}的方案数。等式右边第一项是从{1,2,…,*n*}中取出*k*个数的方案数，命A_i表示选取的*k*个数中不包含*i*，…

线性方程的整数解数目（1）

[例14] 求满足线性方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15,\quad x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0$$

的整数解的数目。

解：这个方程的任意一个整数解都可以看作是15个无区别的球放进3个有标志的盒子，每盒个数不限。因此解的个数为*C*(3+15-1,15)=*C*(15+2,2)= 136

线性方程的整数解数目（2）

[例15] 求满足线性方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15，\quad x_1 \geqslant 6, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0$$

的整数解的数目。

解：可以用换元法求解，命$y_1=x_1-6, y_2=x_2,$ $y_3=x_3$，则问题变为求满足线性方程

$$y_1 + y_2 + y_3 = 9，\quad y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0$$

的整数解的数目，即$C(9+2,2)= 55$

线性方程的整数解数目（3）

[例16] 求满足线性方程

$$x_1+x_2+x_3=15,\quad 0\leqslant x_1\leqslant 5,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0$$

的整数解的数目。

解：令N为线性方程的全体非负整数解，A_1为其中$x_1\geqslant 6$的解,则

$$\alpha(0)=|N|=C(15+2,2)=136$$

$$\alpha(1)=|A_1|=C(9+2,2)=55$$

$$\beta(0)=\alpha(0)-\alpha(1)=136-55=81$$

多重集的r-组合

[例17] 给定多重集$\{5\cdot x, 6\cdot y, 7\cdot z\}$，求从中取15个元素的组合数。

解：令N为从$\{x,y,z\}$ 选出15个元素的全体可重复组合，A_1为N中至少6个x的组合，A_2为N中至少7个y的组合， A_3为N中至少8个z的组合，则

$\alpha(1)=|A_1|+|A_2|+|A_3|=C(11,2)+C(10,2)+C(9,2)=136$，

$\alpha(2)=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|=10$，

$\alpha(3)==|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$

$\beta(0)=\alpha(0)-\alpha(1)+\alpha(2)-\alpha(3)=136-136+10-0=10$

这个问题实际上也就是求满足线性方程：$x_1+x_2+x_3=15$，$0\leqslant x_1\leqslant 5, 0\leqslant x_2\leqslant 6, 0\leqslant x_3\leqslant 7$的整数解的数目。

S(*n*,*m*) 的计算公式

n个有标志的球放进m个有区别的盒子,令A_i表示第i个盒子为空的事件，则

$$\alpha(0)=|N|=m^n,\alpha(1)=\sum_{i=1}^{m}|A_i|=C_1^m(m-1)^n,\alpha(2)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j>i}|A_i\bigcap A_j|=C_2^m(m-2)^n,$$

$$\alpha(3)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\bigcap A_j\bigcap A_k|=C_3^m(m-3)^n,\cdots$$

因此，n个有标志的球放进m个有区别的盒子，无一空盒的方案数为

$$\begin{aligned}\beta(0)&=\alpha(0)-\alpha(1)+\alpha(2)-\cdots+(-1)^n\alpha(n)\\&=C_0^m(m-0)^n-C_1^m(m-1)^n+C_2^m(m-2)^n-\cdots+(-1)^mC_m^m(m-m)^n\\&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_k^m(m-k)^n\end{aligned}$$

注意到n个有标志的球放进m个有区别的盒子无一空盒的方案数为$m!S(n,m)$

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_k^m(m-k)^n$$

错排问题的推广

[定理9] $N=\{1,2,\cdots,n\}$，从N中取r个进行排列得$a_1a_2\cdots a_r$,要求其中有k个数满足$a_i=i$，即有$r-k$个数是错排，这样的排列数用$D(n,r,k)$来表示，则当$n\ge r\ge k$时有

$$D(n,r,k)=\frac{C_k^r}{(n-r)!}\sum_{i=0}^{r-k}(-1)^i C_i^{r-k}(n-k-i)!$$

证明：令A_i表示所有满足$a_i=i$的排列,则$\alpha(t)$对有t个数未错排的排列计数,因此

$$\alpha(t)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_t\le r}|A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap A_{i_t}|=C_t^r C_{r-t}^{n-t}(r-t)!$$

所求为$\beta(k)$，注意这里性质的个数是r个

$$\beta(k)=\alpha(k)-C_k^{k+1}\alpha(k+1)+C_k^{k+2}\alpha(k+2)-\cdots+(-1)^{r-k}C_k^r\alpha(r)$$

$$=\sum_{i=0}^{r-k}(-1)^i C_k^{k+i}\alpha(k+i)=\frac{C_k^r}{(n-r)!}\sum_{i=0}^{r-k}(-1)^i C_i^{r-k}(n-k-i)!$$

不相邻的组合（1）

不相邻的组合是指从$A=\{1,2,\ldots,n\}$中取r个，其中不存在$i,i+1$两个相邻的数同时出现于一个组合中的组合，例如不能出现{1,2,5}

[定理10] 从$A=\{1,2,\ldots,n\}$中取r个作不相邻的组合，其组合数为$C(n-r+1,r)$

证明:从$A=\{1,2,\ldots,n\}$中取r个作不相邻的组合与从$A'=\{1,2,\ldots,n-r+1\}$中取r个作组合一一对应

$$b_1,b_2,b_3,\ldots,b_r \leftrightarrow b_1,b_2-1,b_3-2,\ldots,b_r-r+1$$

不相邻的组合（2）

[定理11] 假定数n个顶点沿一圆周排列，则从其中选取k个不相邻顶点的方法数是$n/k \cdot C(n-k-1,k-1)$

证明:对于任意一个顶点A，先取A，然后再从不和A相邻的n-3个其他顶点中取k-1个不相邻顶点，显然可得到符合定理要求的组合，这种组合的个数为$C((n-3)-(k-1)+1, k-1)=C(n-k-1,k-1)$。

注意到一共有n个顶点，而且在每个组合中有k个元素，即可完成证明。

n对夫妻问题

[例18]有n对夫妻围一圆桌而坐，则有多少种方案使男女交错而又避免夫妻相邻？

解：先让n位妻子围桌而坐，每两个人之间留一个空位，并按顺时针给予1到n的编号，然后让丈夫找空位坐下，令性质

A_1：丈夫1坐在妻子1的右边

A_2：丈夫1坐在妻子1的左边

A_3：丈夫2坐在妻子2的右边

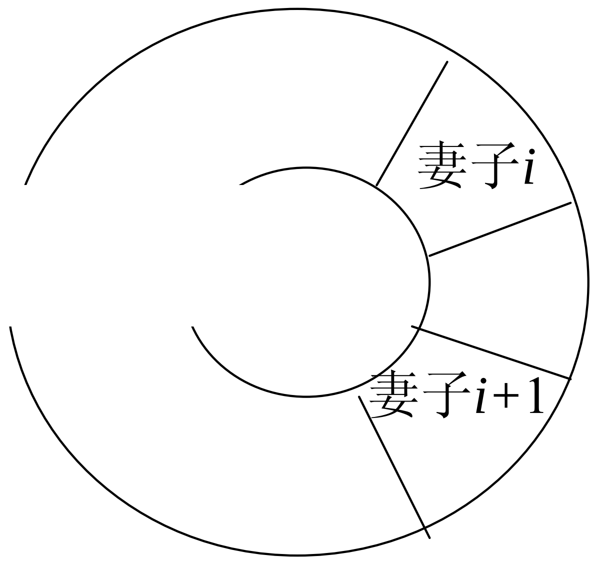
A_4：丈夫2坐在妻子2的左边

…

A_n：丈夫n坐在妻子n的右边

A_{2n}：丈夫n坐在妻子n的左边

显然A_i和A_{i+1}不能同时成立，注意i=1,2,…,2n



因此，当$n<k\le 2n$时，有$|A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap A_{i_k}|=0$,

$$\alpha(k)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le 2n}|A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap A_{i_k}|=0$$

当$1\le k\le n$时，

$$\alpha(k)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le 2n}|A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap A_{i_k}|=\frac{2n}{k}C_{k-1}^{2n-k-1}(n-k)!$$

由广义容斥原理可得

$$\beta(k)=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}C_k^i\alpha(i)=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}C_k^i\frac{2n}{i}C_{i-1}^{2n-i-1}(n-i)!$$

最终

$$\beta(0)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{2n}{i}C_{i-1}^{2n-i-1}(n-i)!=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{2n}{2n-i}C_i^{2n-i}(n-i)!$$