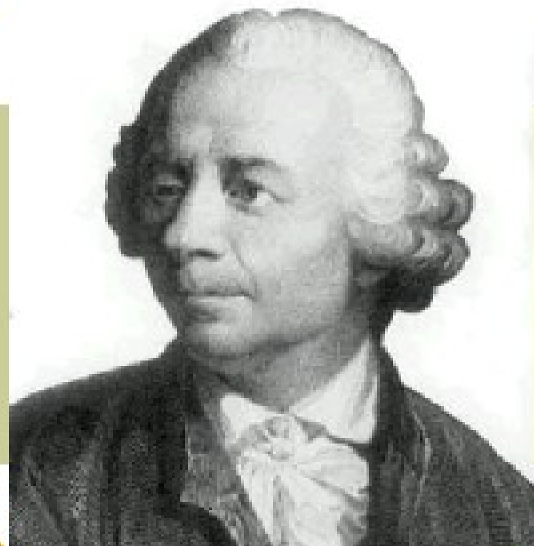
南京大學
NANJING UNIVERSITY



离散数学
Discrete Mathematics

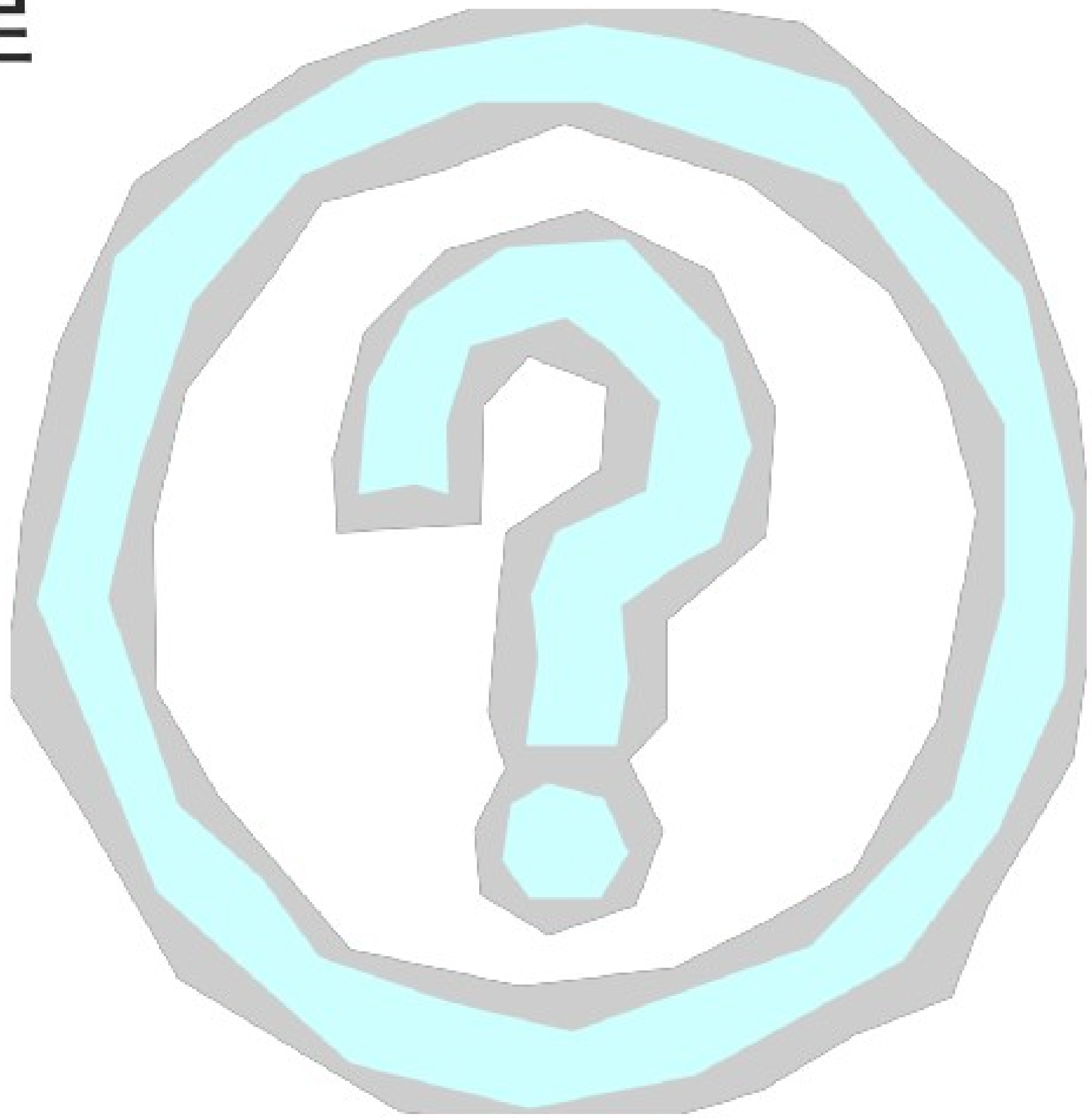
第八讲：偏 序 集

南京大学计算机科学与技术系

2012年3月19日

前 情 提 要

- 自然数与无穷公理
- 有穷集与无穷集
- 集合的势
- 集合的等势关系
- Cantor 定理
- 集合的优势关系



课 堂 练 习

- 设$\mathfrak{C} = \{f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$且$f$为连续函数$\}$，则$|\mathfrak{C}| =$________.

（GRE® Subject Test of Computer Science）

证明：

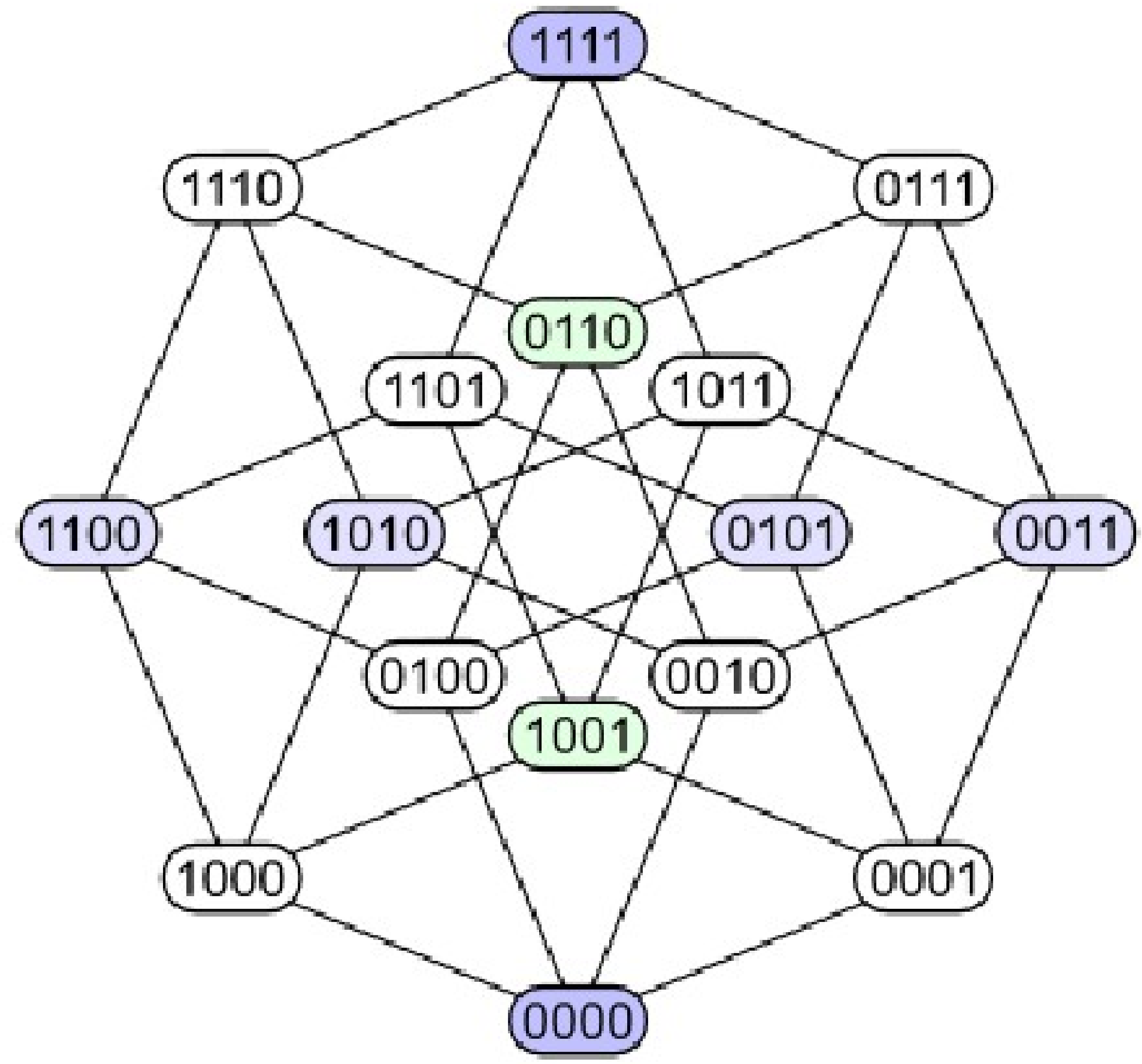
(1) 构造函数$\mathfrak{F}: \mathbb{R} \to \mathfrak{C}$，对于任意 $x \in \mathbb{R}, \mathfrak{F}(x) = x$（常函数），注意$\mathfrak{F}$并不是泛函；对于任意$y \in \mathbb{R}, \mathfrak{F}(y) = x$，显然$\mathfrak{F}$是单射的，故$\aleph = \text{card}(\mathbb{R}) \le \text{card}(\mathfrak{C})$;

(2) 考察函数集合$\mathfrak{N} = \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} = \{f \mid f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\}$,根据基数的性质,$\text{card}(\mathfrak{N}) = \text{card}(\mathbb{R})^{\text{card}(\mathbb{Q})} = \aleph^{\aleph_0}$。定义函数$\mathfrak{Q}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{N}$如下：对于任意的$f \in \mathfrak{C}$，$F(f) = f \restriction \mathbb{Q}$，以下证明$F$为单射：对于$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$的连续函数$f_1$和$f_2$，若$F(f_1) = F(f_2)$，则表明$f_1$和$f_2$在所有的有理点处的函数值相同；于是对于任意$x \in \mathbb{R}$，任取一个以$x$为极限的有理数序列$\{x_n\}$，由于$f_1$和$f_2$均为定义在$\mathbb{R}$上的连续函数，所以$f_1(x) = \lim_{x_k \to x} f_1(x) = \lim_{x_k \to x} f_2(x) = f_2(x)$成立。由于对于任意$x \in \mathbb{R}$上式均成立，故$F(f_1) = F(f_2) \Leftrightarrow f_1 = f_2$，因此$F$为单射。所以有$\text{card}(\mathfrak{C}) \le \text{card}(\mathfrak{N}) = \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$;

由(1)(2)，有$\text{card}(\mathfrak{C}) = \aleph$。 □

本讲主要内容

- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素
- 特殊元素的性质
- 布尔代数在计算机科学中的应用



偏序关系(Partially Ordered)

1．定义 7.19

偏序关系：非空集合 A 上的自反、反对称和传递的关系，记作$\preccurlyeq$.

设$\preccurlyeq$为偏序关系，如果$<x, y> \in \preccurlyeq$，则记作 $x \preccurlyeq y$，读作 x“小于或等于”y.

2．实例

集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系.

小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

偏序关系（续）

定义 7.20 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

$x,y \in A$, x 与 y 可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

任取两个元素 x 和 y, 可能有下述几种情况发生:

$x \prec y$(或 $y \prec x$), $x = y$, x 与 y 不是可比的.

定义 7.21 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

$\forall x,y \in A$, x 与 y 都是可比的，则称 R 为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义 7.22 $x,y \in A$, 如果 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$, 则称 y 覆盖 x.

例如{1,2,4,6}集合上的整除关系, 2 覆盖 1, 4 和 6 覆盖 2. 但 4 不覆盖 1.

偏序集(poset)与哈斯图

1．偏序集

定义 7.23 集合 A 和 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起叫做偏序集，记作 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$.

实例：

整数集合 Z 和数的小于或等于关系 $\le$ 构成偏序集 $\langle Z,\le\rangle$

集合 A 的幂集 $P(A)$ 和包含关系 $R_{\subseteq}$ 构成偏序集 $\langle P(A),R_{\subseteq}\rangle$.

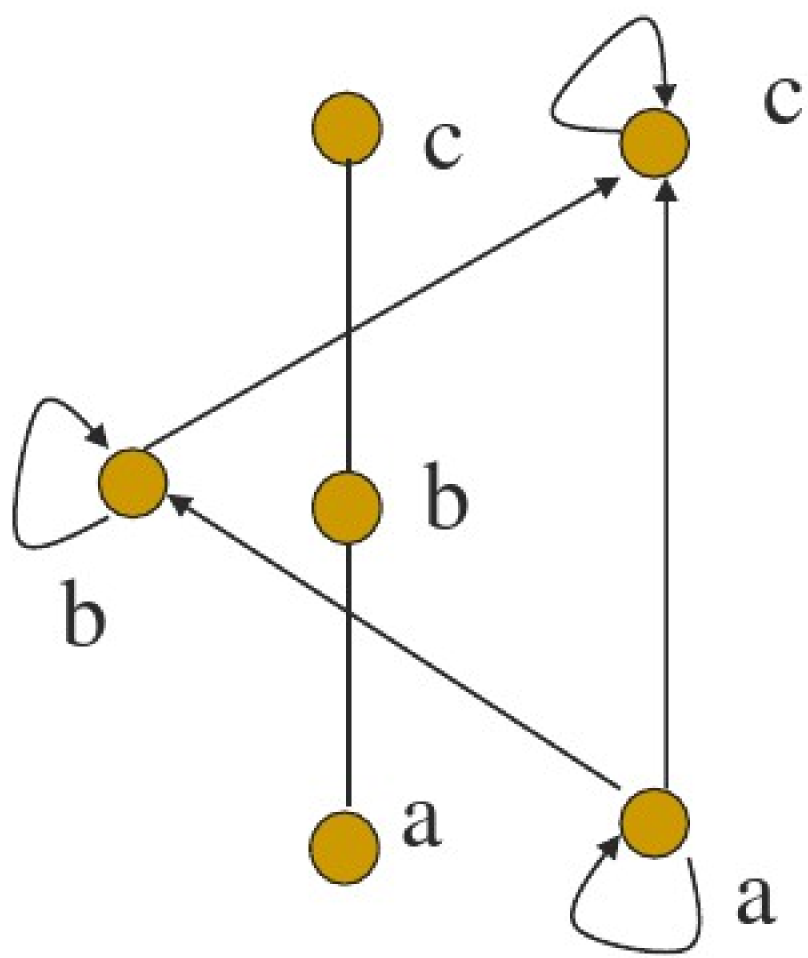
2．哈斯图

利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点：

- 每个结点没有环
- 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前
- 具有覆盖关系的两个结点之间连边

哈斯图（Hasse Diagrams）



Simplify:

Omit all cycle with length 1

Omit all edges implied by the transitive property (path with length >1)

Omit all arrows with default up and down direction

偏序集

例： 证明$\langle P(A), \subseteq\rangle$为全序当且仅当$|A| \leq 1$

证明：(1) “$\Leftarrow$”：

Case 1: $|A| = 0$, $P(A) = \{\emptyset\}$, $(P(A), \subseteq)$为全序

Case 2: $|A| = 1$,设$A = \{a\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$, $(P(A), \subseteq)$为全序

“$\Rightarrow$”：只需证$|A| \geqslant 2$时，$(P(A), \subseteq)$非全序

$\because |A| \geqslant 2 \quad \therefore$可取$a, b \in A$, $a \neq b$

$\because$非$\{a\}\square\{b\} \quad \therefore (P(A), \subseteq)$非全序

偏序集（续）

- **例：** 字典序(lexicographic order)与偏序集
- 给定两个偏序集$\langle A, \preccurlyeq_A \rangle$与$\langle B, \preccurlyeq_B \rangle$，在$A \times B$上定义新关系“$\preccurlyeq$”：$(a, b) \preccurlyeq (a', b') \Leftrightarrow$在$A$中有$a \preccurlyeq_A a'$且在$B$中有$b \preccurlyeq_B b'$
- 易证，$\langle A \times B, \preccurlyeq \rangle$是偏序集
- 字典序即为该模型的一个应用

偏序集（续）

- 例如，在字典中“part”和“park”两个单词的顺序如何?
- 定义全序集（英文字母表）$S = \{a, b, c, \cdots, z\}$，元素满足线序关系$a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq c, \cdots, y \preccurlyeq z$，令$S^4 = S \times S \times S \times S$，易见，$(p, a, r, t) \in S^4$，$(p, a, r, k) \in S^4$；根据字典序，$park \preccurlyeq part$

哈斯图

例 偏序集$<\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{整除}>$和$<P(\{a,b,c\}),R_{\subseteq}>$的哈斯图.

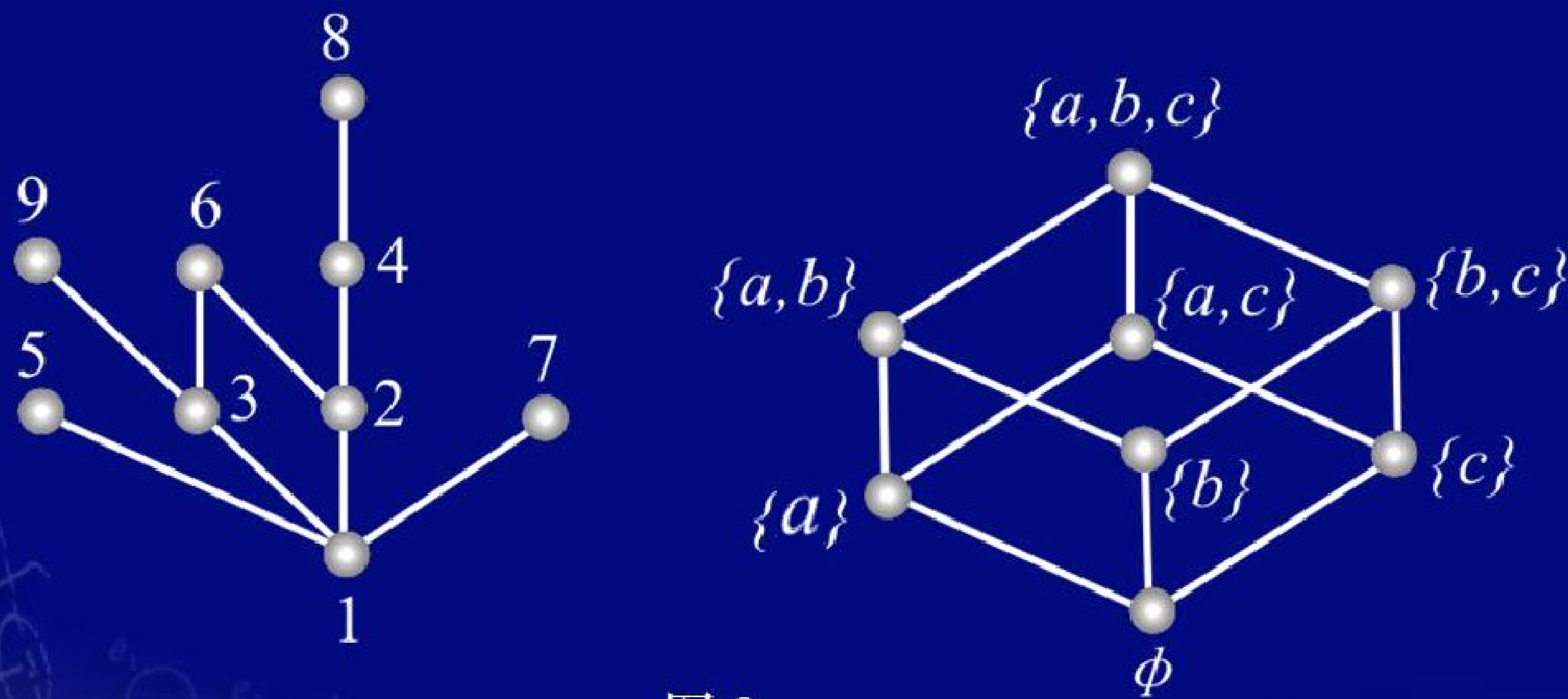
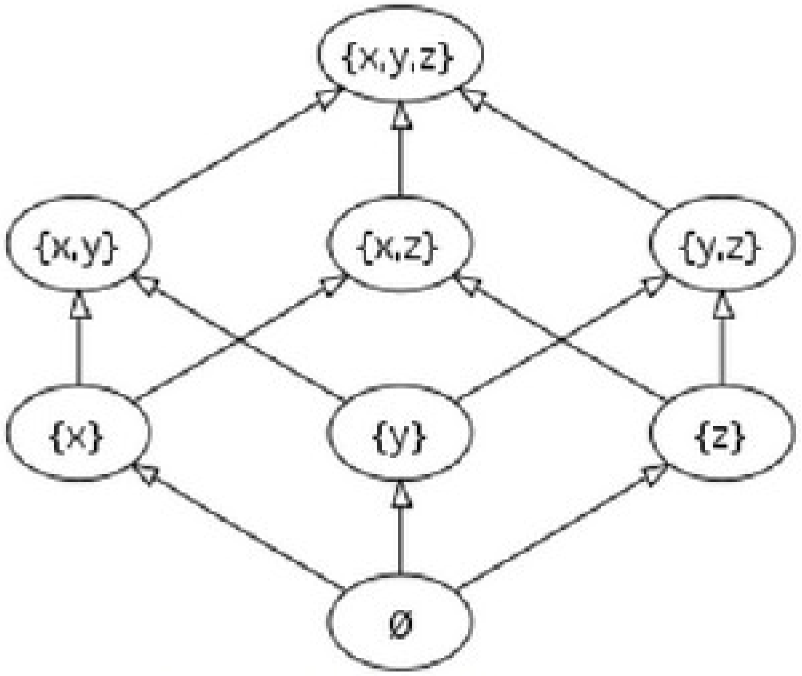


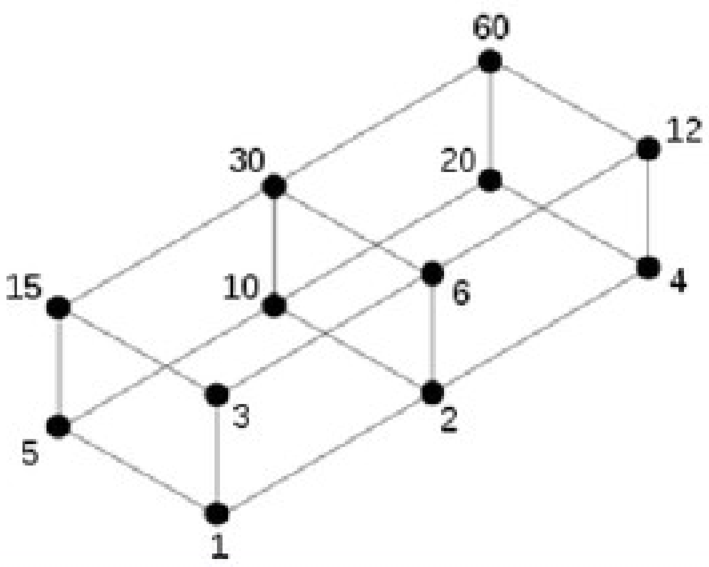
图 8

哈斯图（续）

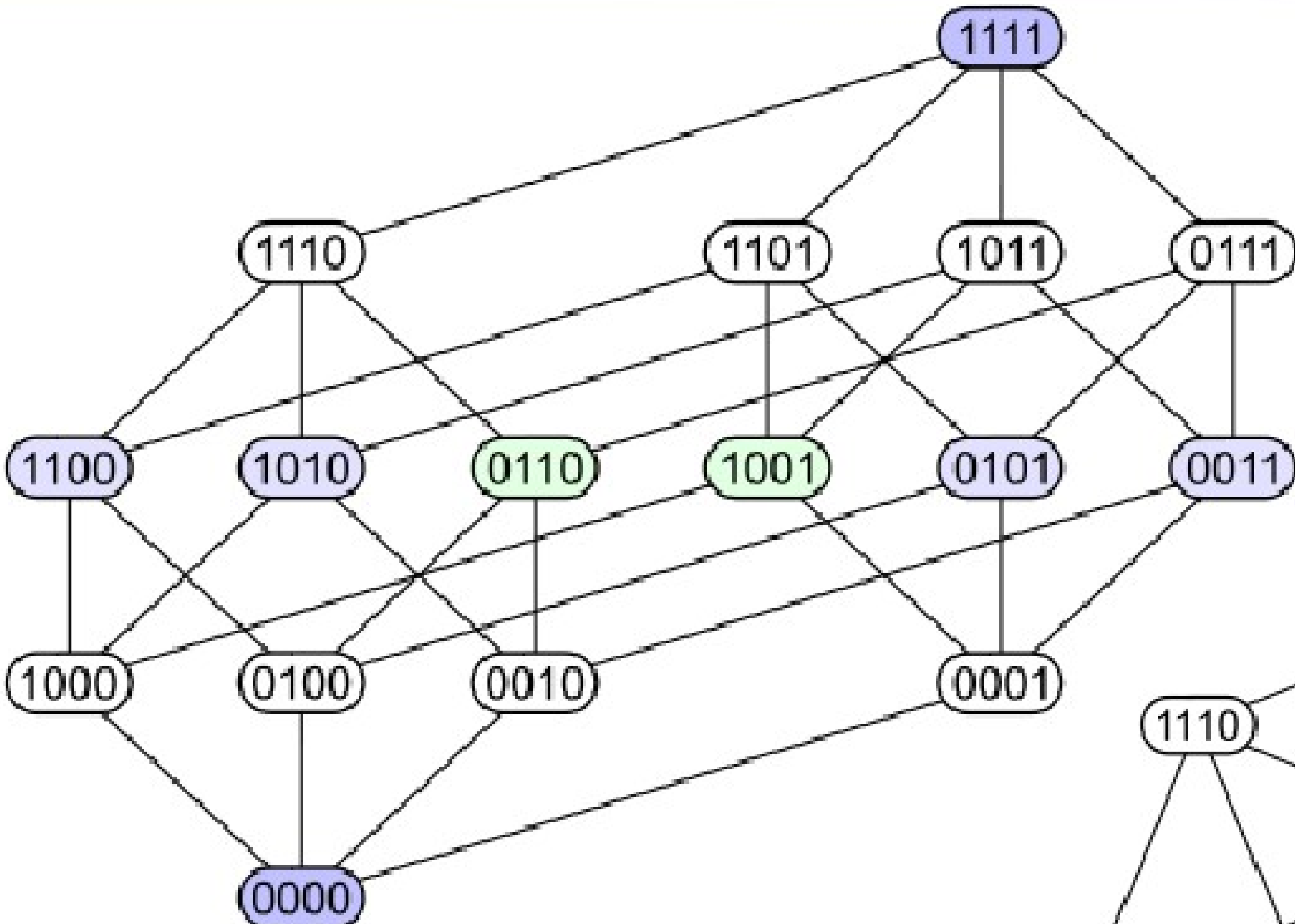
- The power set of { x, y, z } partially ordered by inclusion, has the Hasse diagram:

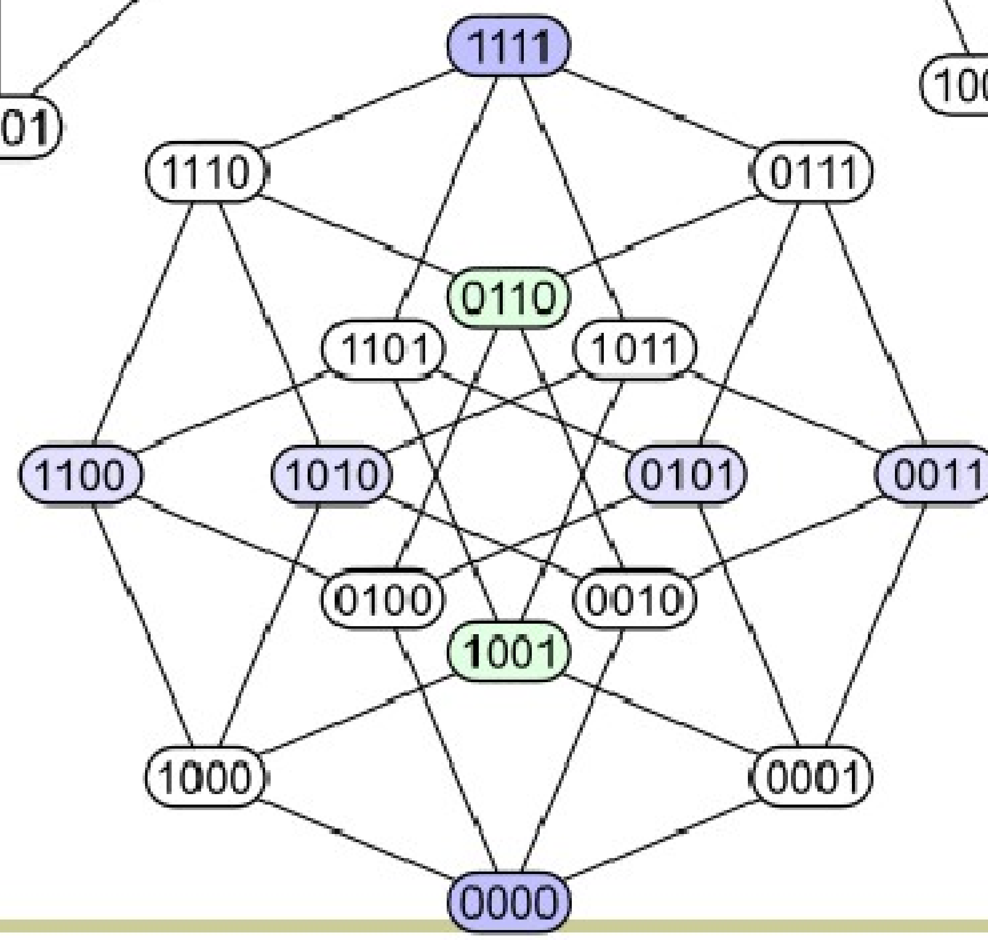


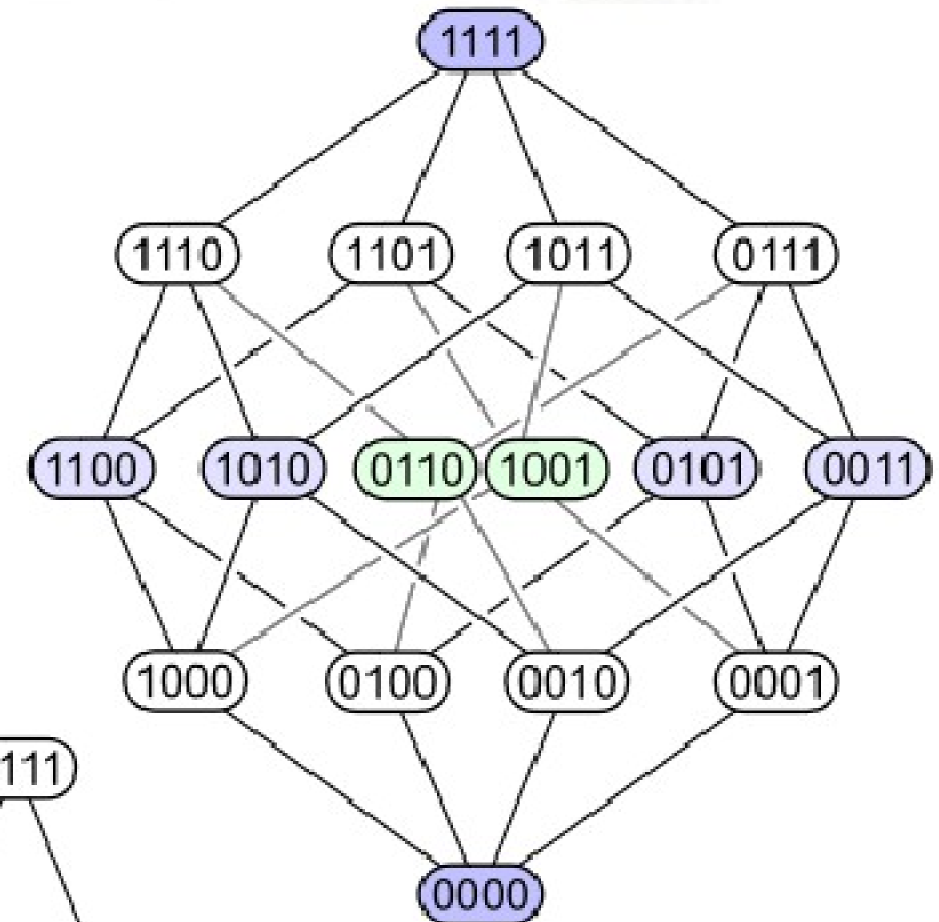
- The set A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 } of all divisors of 60, partially ordered by divisibility, has the Hasse diagram:



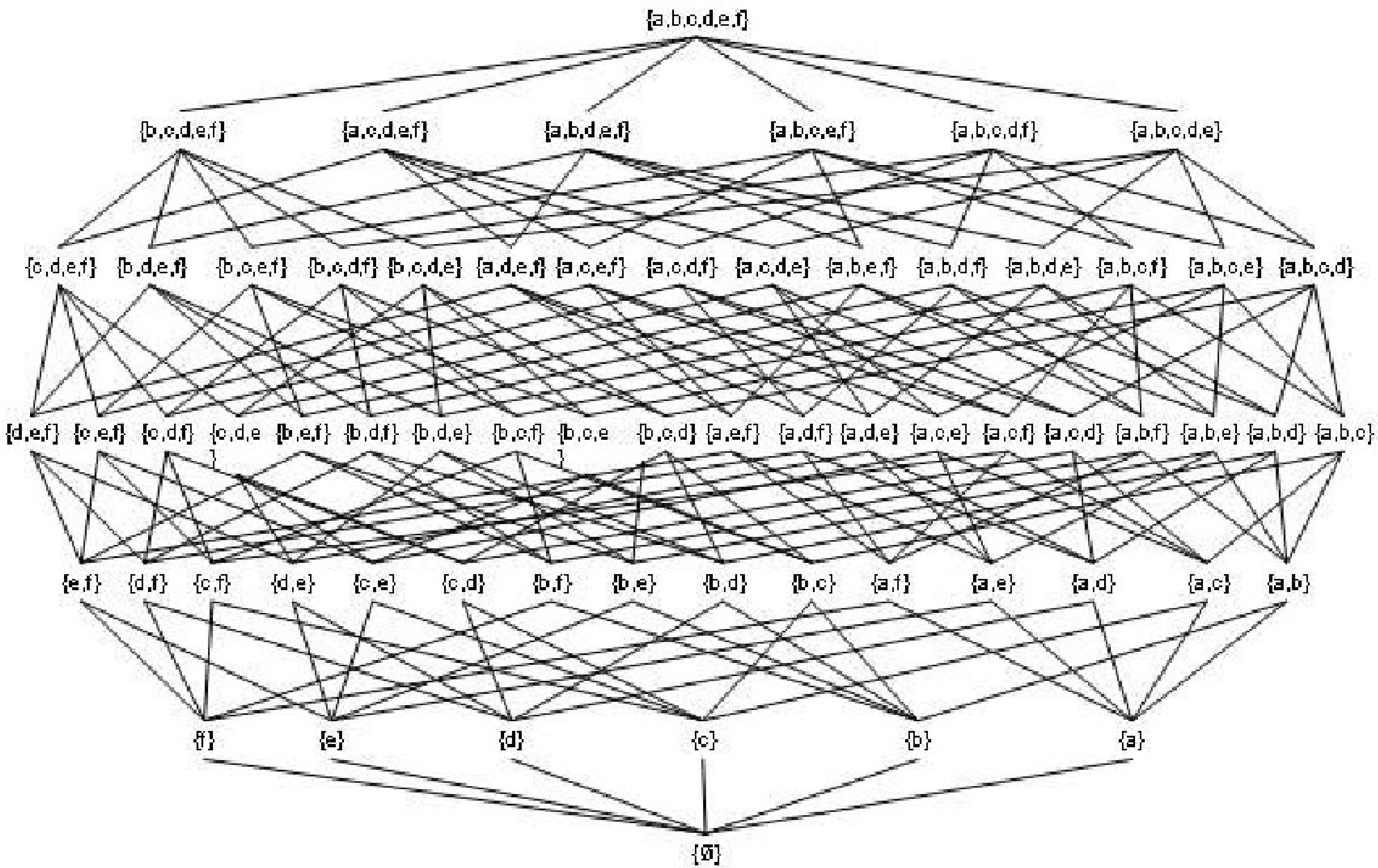
哈斯图（续）


1111
1110
1101
1011
0111
1100
1010
0110
1001
0101
0011
1000
0100
0010
0001
0000


1111
1110
0111
0110
1101
1011
1100
1010
0101
0011
0100
0010
1001
1000
0001
0000


1111
1110
1101
1011
0111
1100
1010
0110
1001
0101
0011
1000
0100
0010
0001
0000

哈斯图（续）


{a,b,c,d,e,f}
{b,c,d,e,f} {a,c,d,e,f} {a,b,d,e,f} {a,b,c,e,f} {a,b,c,d,f} {a,b,c,d,e}
{c,d,e,f} {b,d,e,f} {b,c,e,f} {b,c,d,f} {b,c,d,e} {a,d,e,f} {a,c,e,f} {a,c,d,f} {a,c,d,e} {a,b,e,f} {a,b,d,f} {a,b,d,e} {a,b,c,f} {a,b,c,e} {a,b,c,d}
{d,e,f} {c,e,f} {c,d,f} {c,d,e} {b,e,f} {b,d,f} {b,d,e} {b,c,f} {b,c,e} {b,c,d} {a,e,f} {a,d,f} {a,d,e} {a,c,e} {a,c,f} {a,c,d} {a,b,f} {a,b,e} {a,b,d} {a,b,c}
{e,f} {d,f} {c,f} {d,e} {c,e} {c,d} {b,f} {b,e} {b,d} {b,c} {a,f} {a,e} {a,d} {a,c} {a,b}
{f} {e} {d} {c} {b} {a}
{Ø}

哈斯图（续）

例　已知偏序集$<A,R>$的哈斯图如下图所示，试求出集合 A 和关系 R 的表达式.

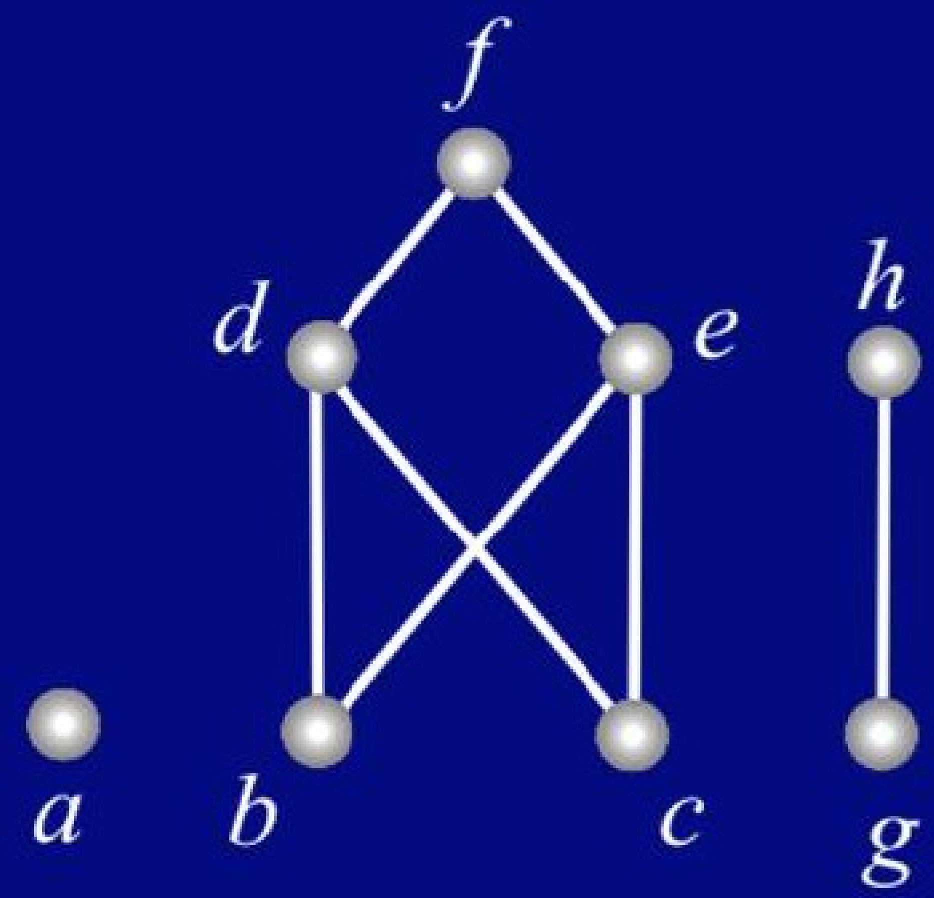


图 9

解　$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$$

偏序集中的特殊元素及其性质

1. 最小元、最大元、极小元、极大元

定义 7.24 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为 B 的最小元.

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为 B 的最大元.

(3) 若$\forall x(x\in B\land x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为 B 的极小元.

(4) 若$\forall x(x\in B\land y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为 B 的极大元.

性质:

- 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，还可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集中的特殊元素及其性质（续）

2．下界、上界、下确界（最大下界）、上确界（最小上界）

定义 7.25 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

（1）若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为 B 的上界.

（2）若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为 B 的下界.

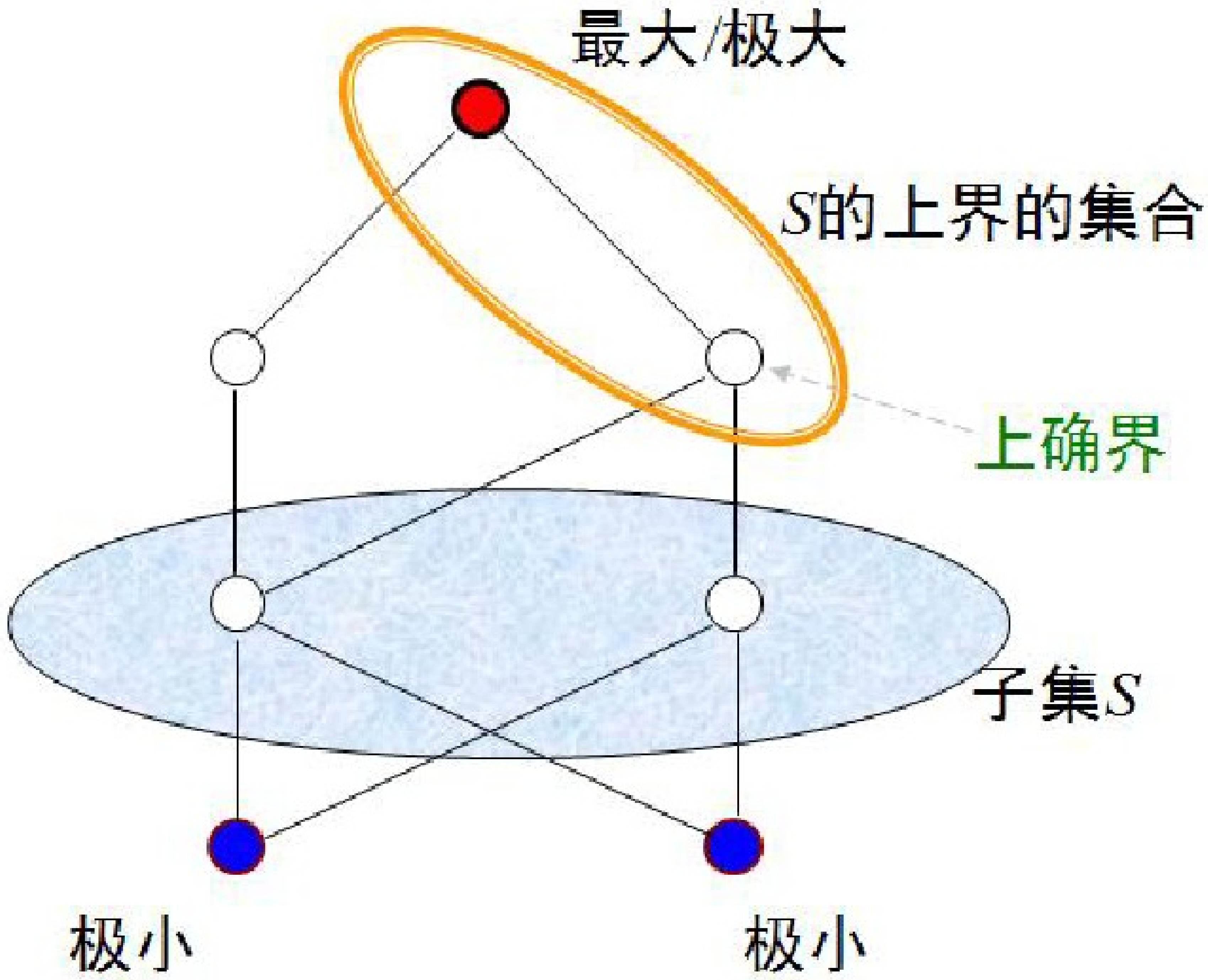
（3）令 $C = \{y \mid y$ 为 B 的上界$\}$, 则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界.

（4）令 $D = \{y \mid y$ 为 B 的下界$\}$, 则称 D 的最大元为 B 的最大下界或下确界.

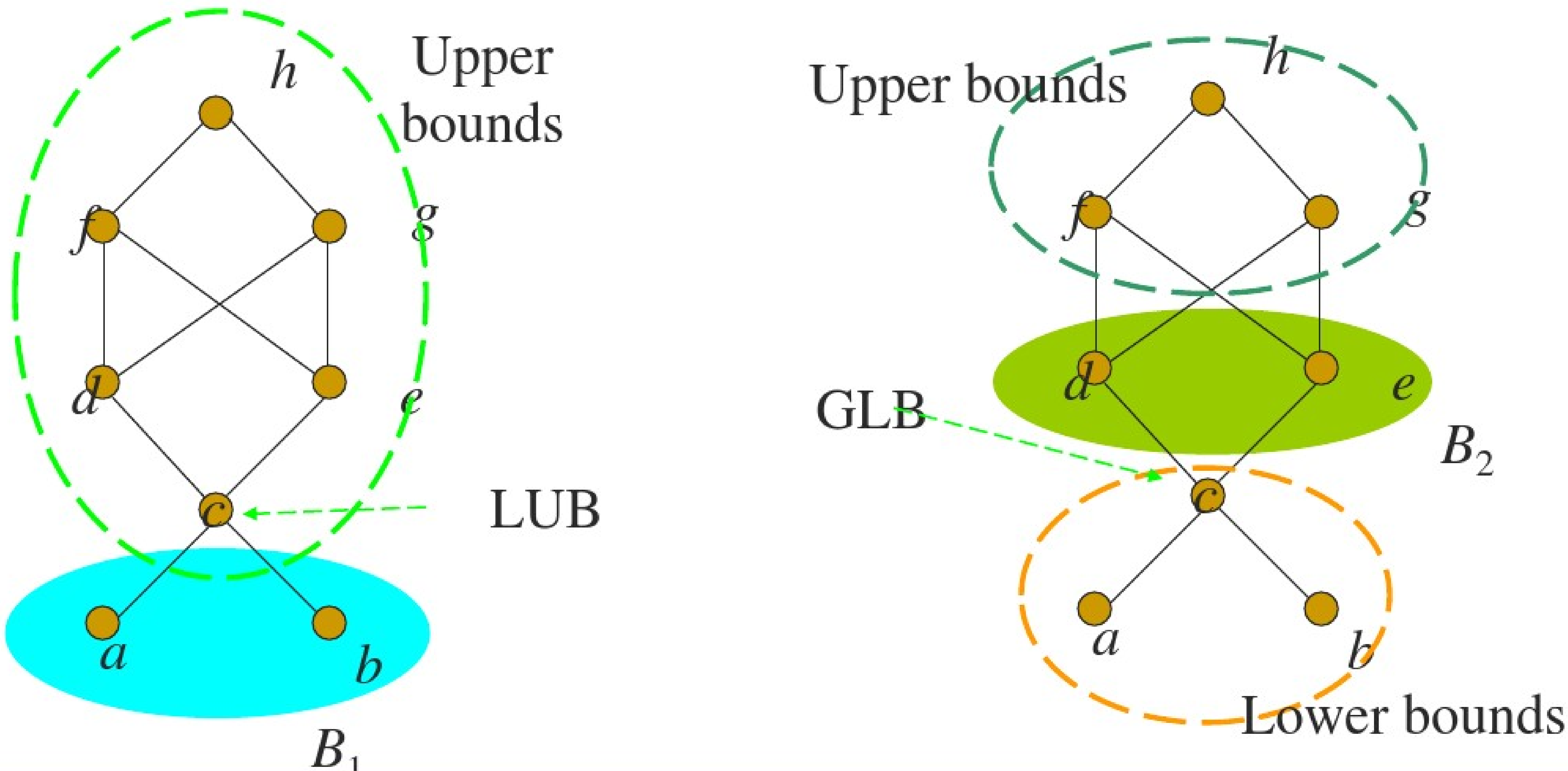
性质:

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

从哈斯图看特殊元素



从哈斯图看特殊元素（续）



Upper bounds
h
f
g
d
e
c
LUB
a
b
B_1
Upper bounds
h
f
g
GLB
d
e
B_2
c
a
b
Lower bounds

偏序集中的特殊元素及其性质（续）

例 设偏序集<A,≼>如下图所示，

求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元.

设 $B=\{b,c,d\}$，求 B 的下界、上界、下确界、上确界.

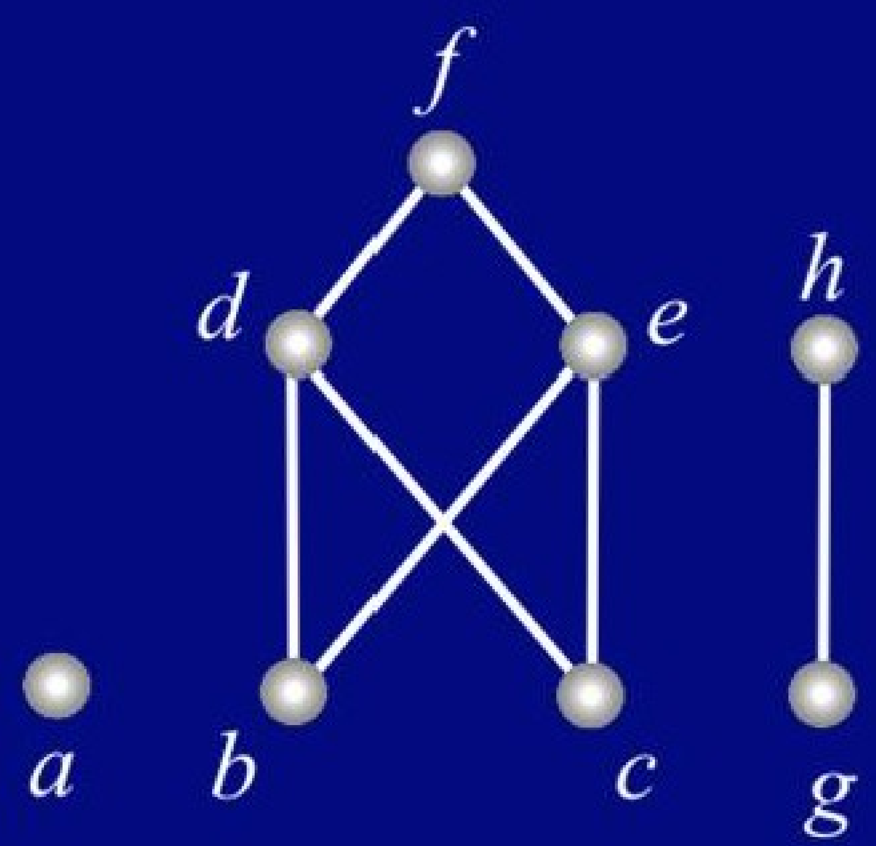


图 10

解 极小元：a, b, c, g； 极大元：a, f, h；没有最小元与最大元.

B 的下界和最大下界都不存在，上界有 d 和 f，最小上界为 d.

偏序集中的特殊元素及其性质（续）

例 设 X 为集合, $A=P(X)-\{\varnothing\}-\{X\}$, 且 $A\neq\varnothing$. 若 $|X|=n$, $n\geq 2$. 问:

(1) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最大元?

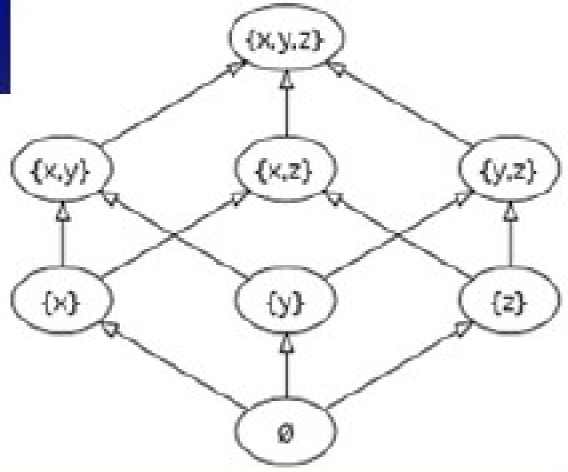
(2) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最小元?

(3) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 中极大元和极小元的一般形式是什么? 并说明理由.

解 $<A, R_{\subseteq}>$ 不存在最小元和最大元, 因为 $n\geq 2$.

$<A, R_{\subseteq}>$ 的极小元就是 X 的所有单元集, 即 $\{x\}, x\in X$.

$<A, R_{\subseteq}>$ 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即 $X-\{x\}, x\in X$.



偏序集中的特殊元素及其性质（续）

4．设偏序集 $<A, R>$ 的哈斯图如图所示.

（1）写出 A 和 R 的集合表达式

（2）求该偏序集中的

极大元

极小元

最大元

最小元

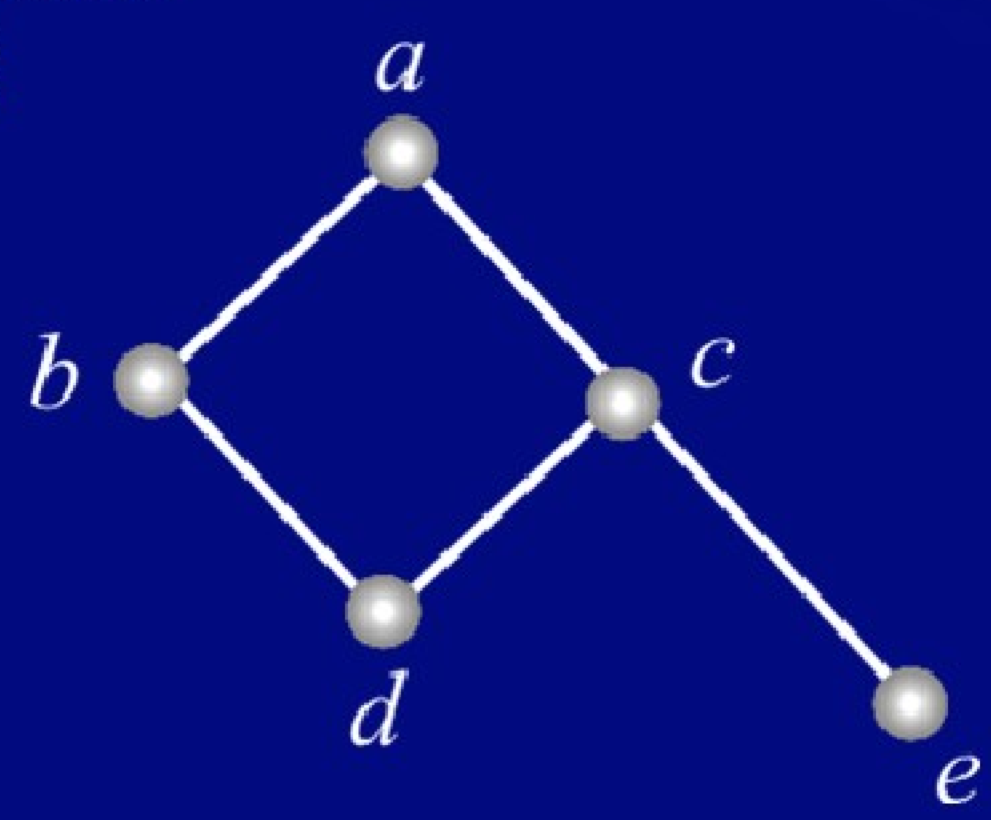


图11

解 （1）$A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{<d,b>, <d,a>, <d,c>, <e,c>, <e,a>, <b,a>, <c,a>\} \cup I_A$

（2）极大元和最大元是 a，极小元是 d, e；没有最小元.

偏序集中的特殊元素及其性质（续）

6．设偏序集$<A,R>$和$<B,S>$，定义 $A\times B$ 上二元关系 T:

$$<x,y>T<u,v> \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明 T 为偏序关系.

证 证明自反性　任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in A\times B \Rightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow xRx\wedge ySy \Rightarrow <x,y>T<x,y>$$

证明反对称性　任取$<x,y>,<u,v>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<x,y> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v$$

$$\Rightarrow <x,y>=<u,v>$$

证明传递性　任取$<x,y>,<u,v>, <w,t>$

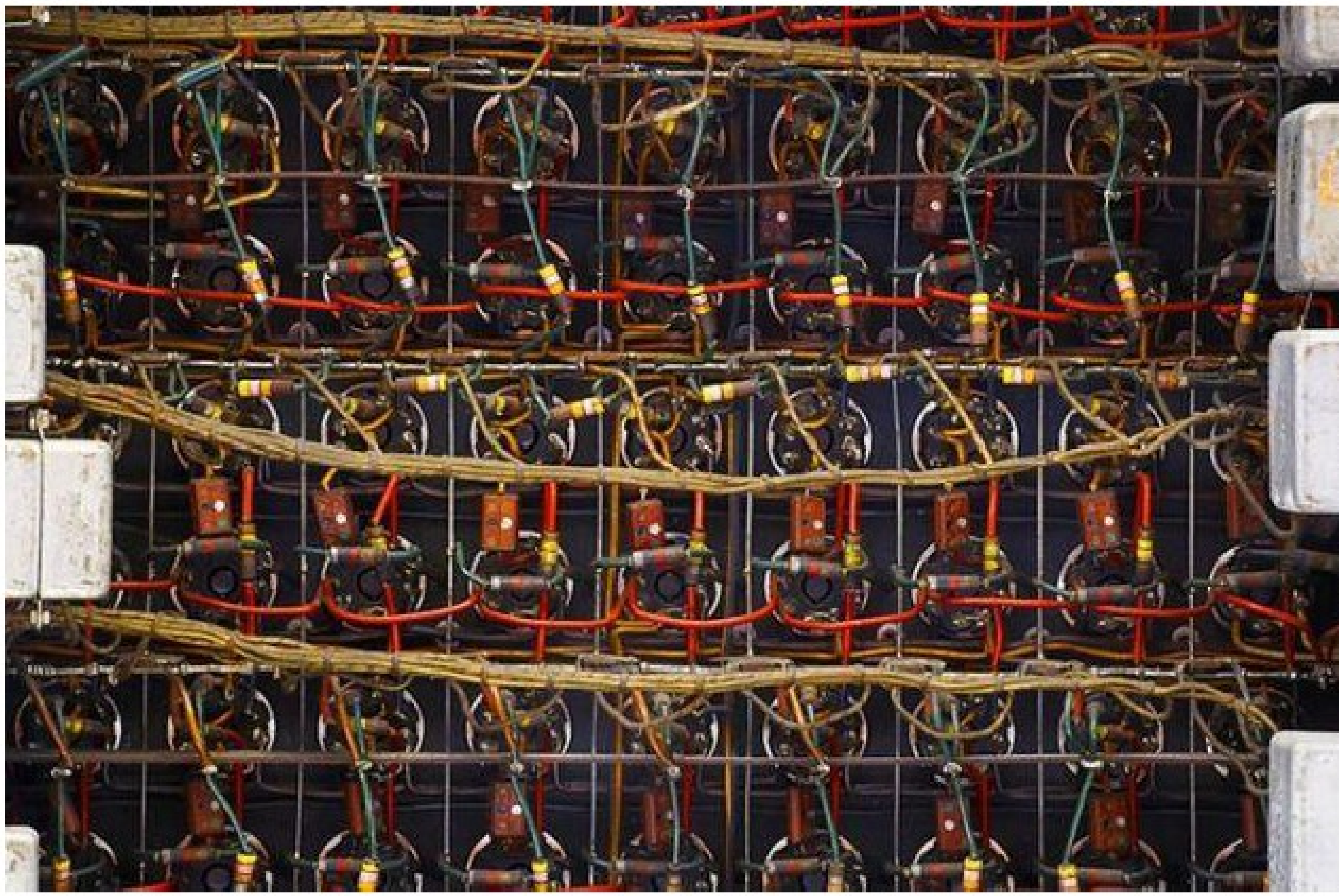
$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<w,t> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt$$

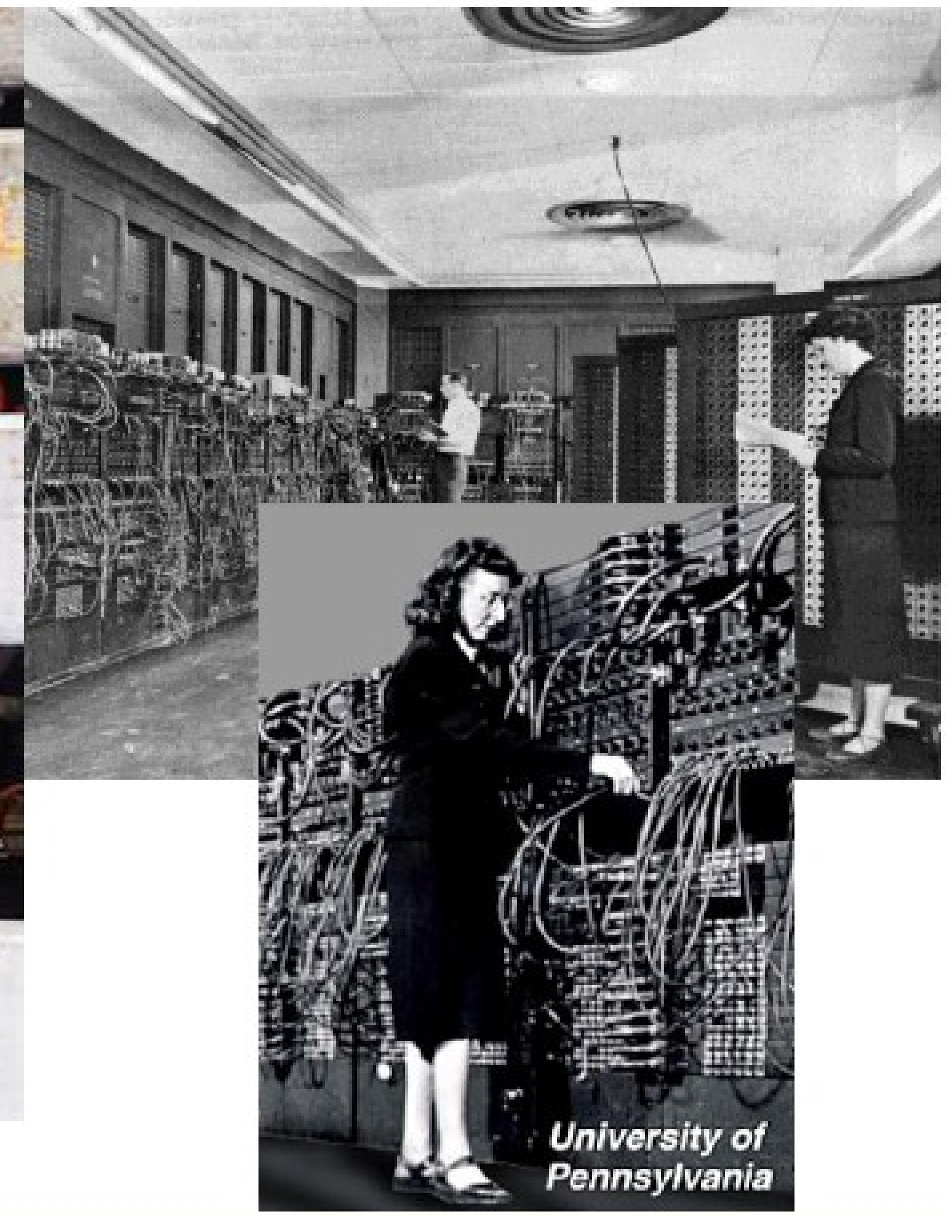
$$\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt$$

$$\Rightarrow <x,y>T<w,t>$$

布尔代数在计算机科学中的应用

- 布尔代数是现代计算机科学的数学基础



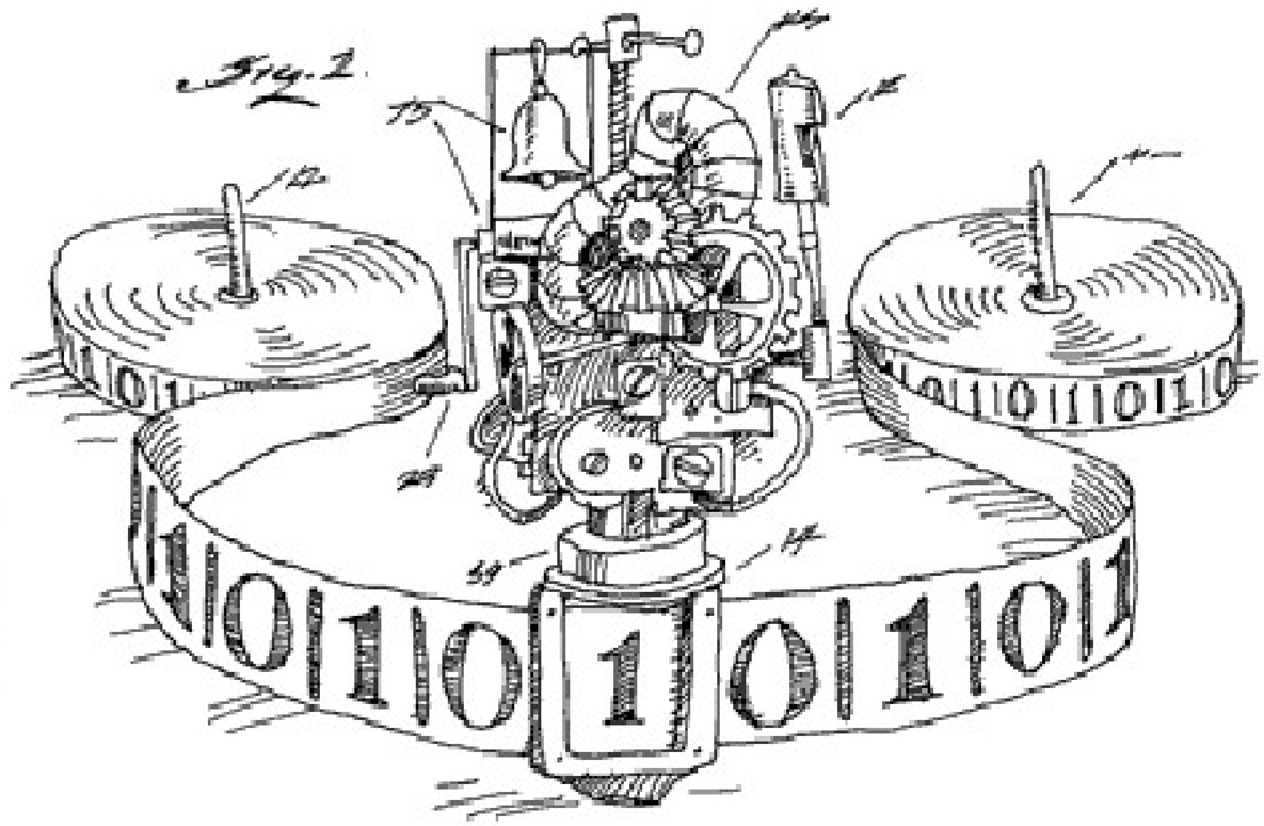


布尔代数在计算机科学中的应用

- 可计算理论的数学基础

Courtesy Clive "Max" Maxfield and Alvin Brown

Alan Turing



0-1布尔代数与计算机中的基本运算

Associative Laws	Commutative Laws	Distributive Laws
(A·B)·C = A·(B·C) = A·B·C	A·B·C = B·A·C = ...	A·(B+C) = (A·B) + (A·C)
(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C	A+B+C = B+C+A = ...	A+(B·C) = (A+B) · (A+C)

Truth tables to verify distributive laws

A	B	C	A+B	B+C	A+C	A·B	B·C	A·C	A·(B+C)	(A·B)+(A·C)	A+(B·C)	(A+B)·(A+C)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	0	1	0	1	1	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	1	0	1	1	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	1	1	1	1	1	0	1	0	**0**	**0**	**1**	**1**
1	0	0	1	0	1	0	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**
1	0	1	1	1	1	0	0	1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	1	0	1	1	1	1	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	**1**	**1**	**1**

布尔代数在计算机科学中的应用

- 0-1布尔代数与开关电路逻辑

利用布尔代数可设计一些具有指定性质的节点线路，数学上即是按给定的真值表构造相应的布尔表达式（最后经过适当的简化），理论上涉及到范式理论，但形式上并不难构造。这样就可以设计出符合要求的开关电路

布尔代数在计算机科学中的应用

- 例：在举重比赛中，通常设三位裁判：一位为主裁，另两位为副裁。竞赛规则规定运动员每次试举必须获得主裁及至少一位副裁的认可，方算成功。裁判员的态度只能同意和不同意两种；运动员的试举也只有成功与失败两种情况。举重问题可用布尔逻辑代数加以描述：
- 用A，B，C三个逻辑变量表示主副三位裁判：取值1表示同意（成功），取值0表示不同意（失败）

布尔代数在计算机科学中的应用

- 举重运动员用L表示，取值1表示成功，0表示失败。显然，L由A，B，C决定。L为A，B，C的逻辑函数。列表如下，该表称为逻辑函数L的真值表：

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
L	0	0	0	0	0	1	1	1

布尔代数在计算机科学中的应用

- 从真值表可看出L取值为1只有三项，A，B，C的取值分别为101，110和111三种情况L才等于1。$A*B'*C$，$A*B*C'$，$A*B*C$三项与上述三种取值对应。由于上述三种情况之一出现就可判定L成功，故：

$$L=(A*B'*C)+(A*B*C')+(A*B*C)$$

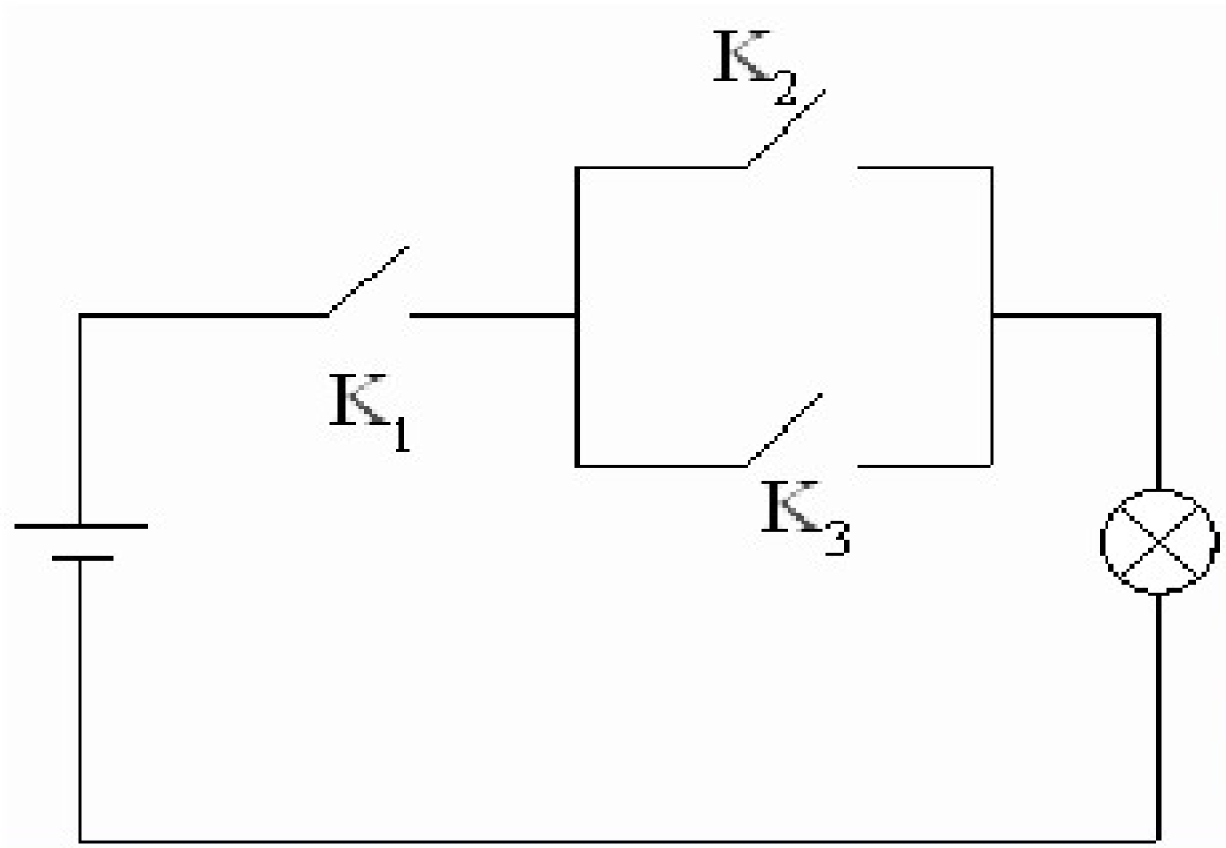
$$=(A*B'*C)+(A*B*C)+(A*B*C')+(A*B*C)$$

$$=(A*C)+(A*B)$$

$$=A*(C+B)$$

布尔代数在计算机科学中的应用

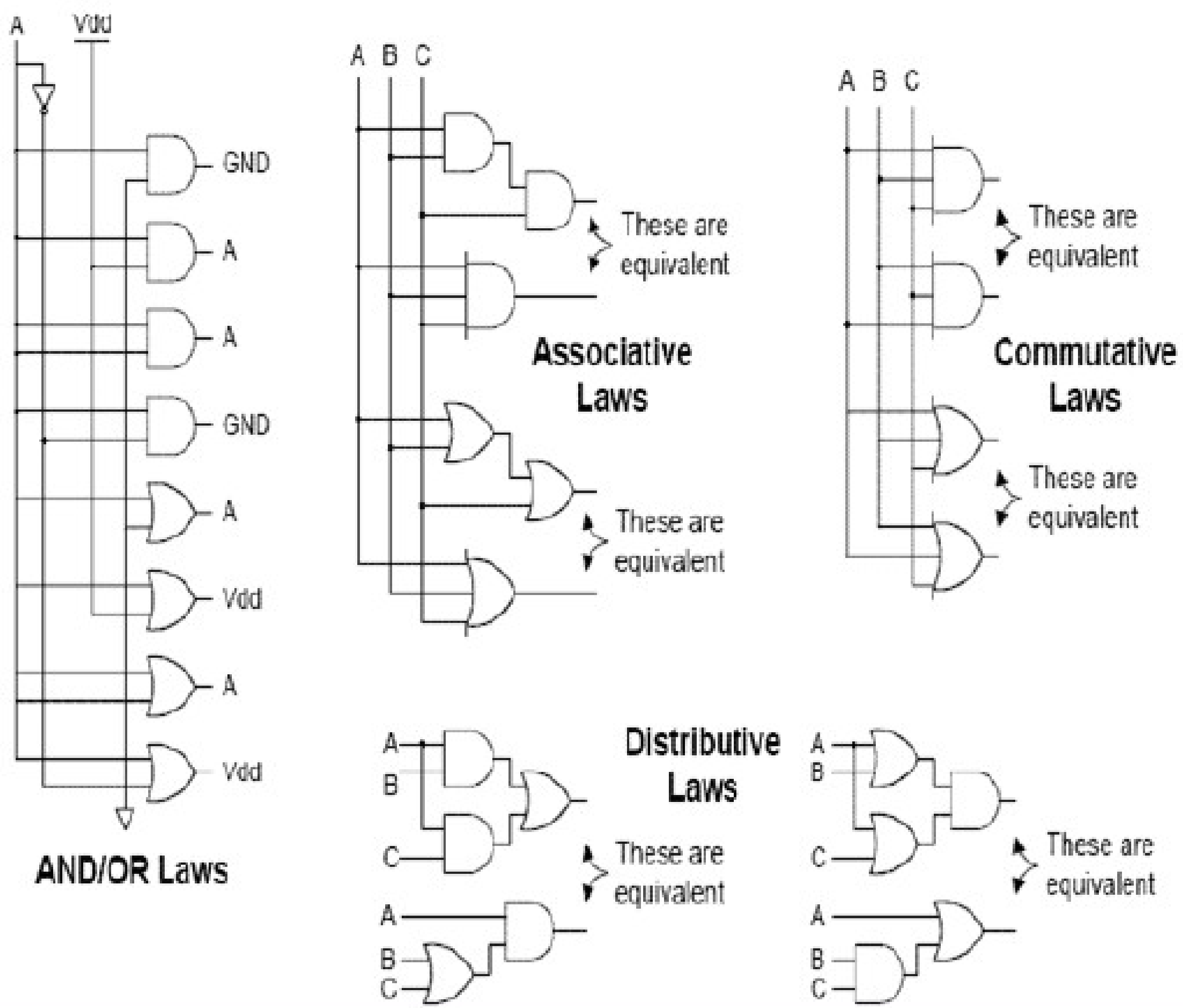
- 根据上述布尔式来设计就可以得到举重裁判的控制电路。其中K_1由主裁控制，K_2和K_3分别由两位副裁控制



0-1布尔代数与二值逻辑门

F = A xnor B xnor C ⇔ F <= (A ⊕ B ⊕ C)' ⇔ F <= A' ⊕ B ⊕ C ⇔ F <= (A' ⊕ B' ⊕ C)' etc.

F = A xor B xor C ⇔ F <= A ⊕ B ⊕ C ⇔ F <= A' ⊕ B' ⊕ C ⇔ F <= (A ⊕ B' ⊕ C)' etc.



$F = A\cdot B\cdot C + A\cdot B\cdot \overline{C} + \overline{A}\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot B$	
$F = A\cdot B\cdot(C+\overline{C}) + \overline{A}\cdot B\cdot(C+1)$	Factoring
$F = A\cdot B\cdot(1) + \overline{A}\cdot B\cdot(1)$	OR law
$F = A\cdot B + \overline{A}\cdot B$	AND law
$F = B\cdot(A+\overline{A})$	Factoring
$F = B\cdot(1)$	OR law
$F = B$	AND law

$F = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{C})$	
$F = (A+B+C)\cdot(A+\overline{C})\cdot(B+1)$	Factoring
$F = (A+B+C)\cdot(A+\overline{C})\cdot(1)$	OR law
$F = (A+B+C)\cdot(A+\overline{C})$	AND law
$F = A+((B+C)\cdot(\overline{C}))$	Factoring
$F = A+(B\cdot\overline{C}+C\cdot\overline{C})$	Distributive
$F = A+(B\cdot\overline{C}+0)$	AND law
$F = A+(B\cdot\overline{C})$	OR law

$F = \overline{A\cdot B\cdot C} + \overline{A}\cdot B\cdot C + \overline{A\cdot C}$	
$F = (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) + \overline{A}\cdot B\cdot C + (\overline{A}+\overline{C})$	DeMorgan's
$F = \overline{A} + \overline{A} + (\overline{A}\cdot B\cdot C) + \overline{B} + \overline{C} + C$	Commutative
$F = \overline{A}\cdot(1+1+B\cdot C) + \overline{B} + \overline{C}$	Factoring
$F = \overline{A}\cdot(1) + \overline{B} + \overline{C}$	OR law
$F = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$	AND law

$F = (A \oplus B) + (A \oplus \overline{B})$	
$F = \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot\overline{B} + A\cdot B$	XOR expansion
$F = \overline{A}\cdot B + \overline{A}\cdot\overline{B} + A\cdot\overline{B} + A\cdot B$	Commutative
$F = \overline{A}\cdot(B+\overline{B}) + A\cdot(\overline{B}+B)$	Factoring
$F = \overline{A}\cdot(1) + A\cdot(1)$	OR law
$F = \overline{A} + A$	AND law
$F = 1$	

$F = \overline{(A \oplus B)} + A\cdot B\cdot C + \overline{A\cdot B}$	
$F = \overline{A}\cdot\overline{B} + A\cdot B + A\cdot B\cdot C + (\overline{A}+\overline{B})$	DeMorgan's
$F = \overline{A}\cdot\overline{B} + \overline{A} + \overline{B} + A\cdot B + A\cdot B\cdot C$	Commutative
$F = \overline{A}\cdot(\overline{B}+1) + \overline{B} + A\cdot B\cdot(1+C)$	Factoring
$F = \overline{A} + \overline{B} + A\cdot B$	OR law
$F = \overline{A} + (\overline{B}+A)\cdot(\overline{B}+B)$	Factoring
$F = \overline{A} + (\overline{B}+A)\cdot(1)$	OR law
$F = \overline{A} + \overline{B} + A$	AND law
$F = 1$	OR law

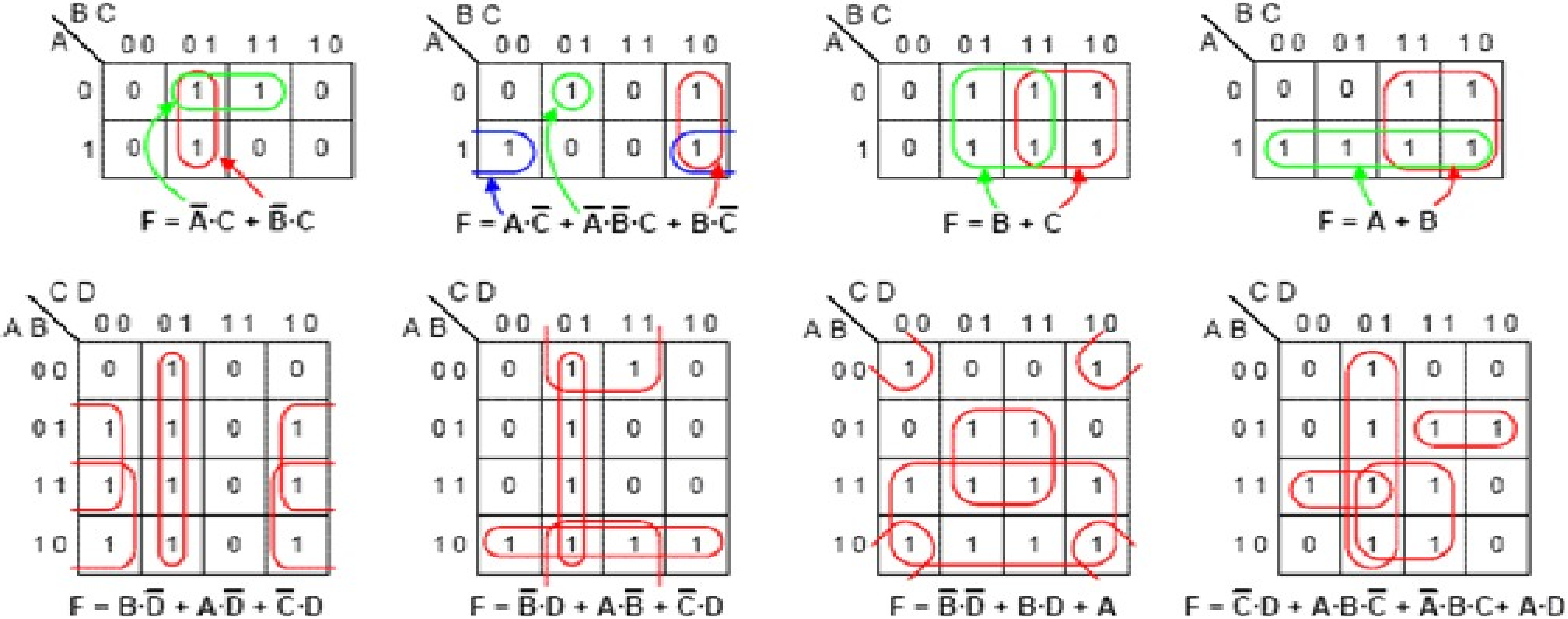
$F = \overline{(\overline{A}+B)} + \overline{(A+B)} + \overline{(A+\overline{B})}$	
$F = (\overline{\overline{A}}\cdot\overline{B}) + (\overline{A}\cdot\overline{B}) + (\overline{A}\cdot B)$	DeMorgan's
$F = A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B$	NOT law
$F = A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot(\overline{B}+B)$	Factoring
$F = A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot(1)$	OR law
$F = A\cdot\overline{B} + \overline{A}$	AND law
$F = (A+\overline{A})\cdot(\overline{B}+\overline{A})$	Factoring
$F = (1)\cdot(\overline{B}+\overline{A})$	OR law
$F = \overline{A}+\overline{B}$	AND/Commutative

$F = A + \overline{A}\cdot B$	$= A+B$
$F = (A+\overline{A})\cdot(A+B)$	Factoring
$F = (1)\cdot(A+B)$	OR law
$F = A+B$	AND law

$F = A\cdot(\overline{A}+B)$	$= A\cdot B$
$F = (A\cdot\overline{A})+(A\cdot B)$	Distributive
$F = (0)+(A\cdot B)$	AND law
$F = A\cdot B$	OR law

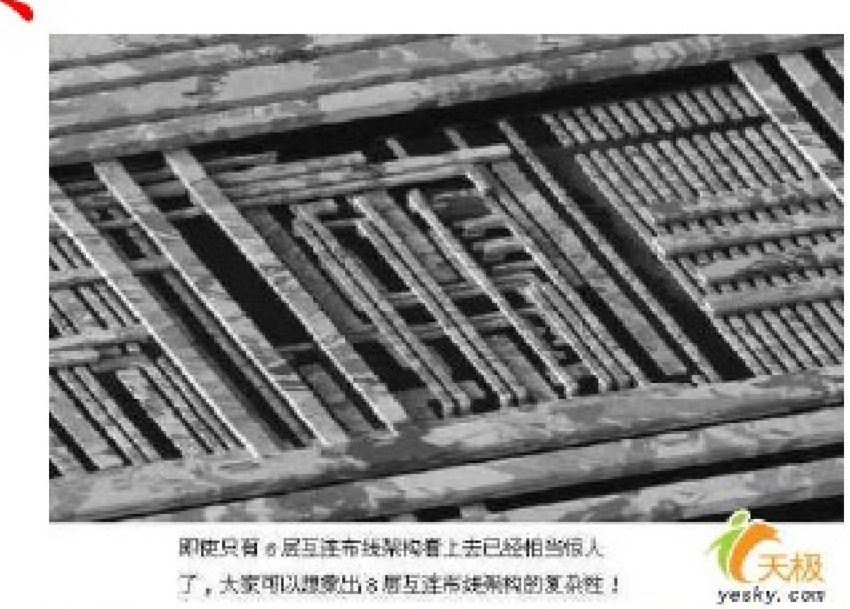
$F = A\cdot\overline{B} + \overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot C$	$= A\cdot\overline{B} + A\cdot\overline{C}$
$F = A\cdot\overline{B} + \overline{B}\cdot C\cdot 1 + \overline{A}\cdot C$	AND law
$F = A\cdot\overline{B} + \overline{B}\cdot C\cdot(A+\overline{A}) + \overline{A}\cdot C$	OR law
$F = A\cdot\overline{B} + A\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot C$	Distributive
$F = A\cdot\overline{B}\cdot(1+C) + \overline{A}\cdot C\cdot(\overline{B}+1)$	Factoring
$F = A\cdot\overline{B}\cdot(1) + A\cdot\overline{C}\cdot(1)$	OR law
$F = A\cdot\overline{B} + A\cdot\overline{C}$	AND law

- 利用0-1布尔代数进行逻辑门化简



布尔代数在计算机科学中的应用

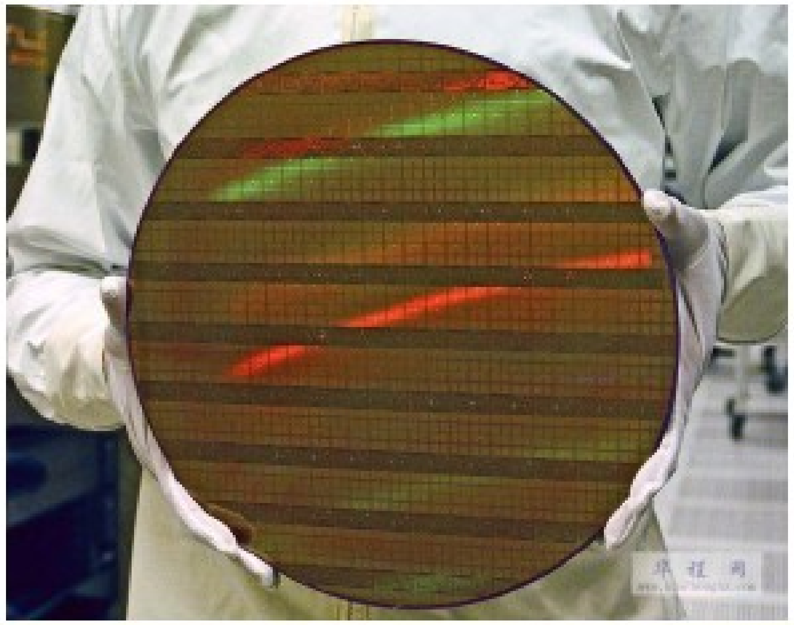
- 现代中央处理机的设计与实现
  - Step 1：CPU行为的布尔逻辑门组合描述
  - Step 2：逻辑电路设计与仿真
  - Step 3：布尔逻辑综合
  - Step 4：版图规划
  - Step 5：单元布局与优化
  - Step 6：静态时序分析（STA）与形式化布尔逻辑验证（FBLV）



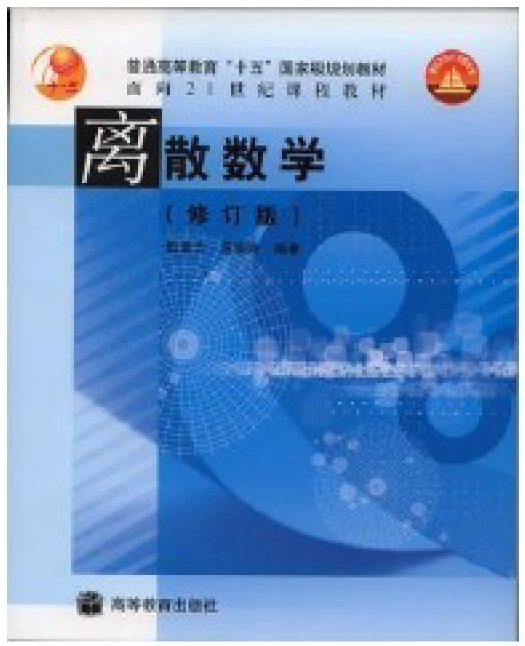
布尔代数在计算机科学中的应用

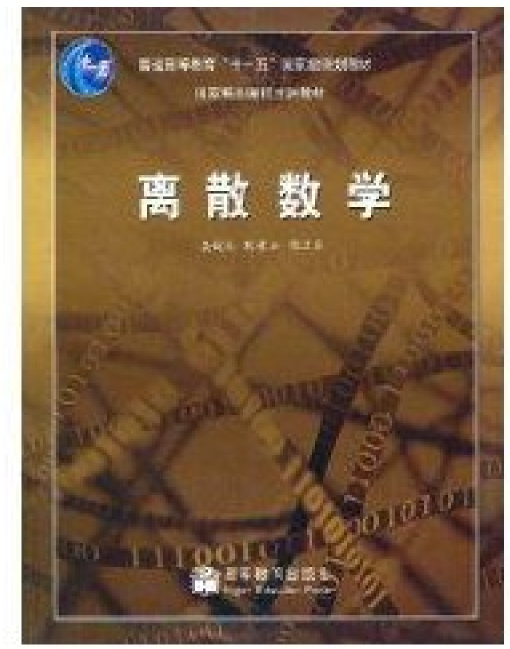
现代中央处理机的设计与实现（续）

- Step 7：可测性电路插入（DFT）
- Step 8：后布局优化、时钟数综合、布线设计
- Step 9：寄生参数提取
- Step 10：后仿真，时序与功率分析
- Step 11：工程修改命令
- Step 12：物理验证
- Step 13：送厂流片



本次课后作业





- pp. 144—145
  - 44—49
- pp. 134—135
  - 44—49