转化目标在解题中的应用

湖南省长沙市长郡中学　　栗师

【摘要】

本文主要简单讨论目标转化思想对算法和分析解决问题的应用。

第一部分概述了为什么要目标转化。第二部分举例说明了转化目标在算法设计中的作用，先达到转化后的目标，再通过转化后的目标得到最终目标。第三部分也通过一道例题，介绍了转化目标在分析问题中的作用。最后总结一些常见的转化目标的方法，以及怎样才能灵活的运用它。

【关键字】

转化目标、放大、缩小、简化问题

【正文】

一、引言

在信息学算法设计的过程中，总会遇到这样或者那样的困难。一个很大的原因就是人的思维的深度和广度都是有限的，而未知世界是无穷的。当遇到一道难解决的问题时，总是觉得目标太遥远，关系错综复杂，无从下手。这时，不妨尝试转化一下目标，从转化后的目标进行思考。例如，减少限制，放松条件，缩小范围等。解决了转化后的目标后，再站在一个新的高度设计算法，或

者把转化的目标的算法推广到原目标。目标转化思想从两个方向为我们提供了捷径：算法和思路。

二、在算法设计中应用转化目标方法

如果一步不能达到目的，那么就分步解决，每一步就达到了一个中间目标，这种方法会经常用到。最常见的就是，如果目标有多个限制，先只对一个限制的得出结论，再从得出的结论出发，考虑其它的限制。下面是以 Poland Olympiad of Informatics 2003 的一题为例，来说明这一种方法。

[例 1]超级马

在一个无限的棋盘上有一个超级马，它可以完成各种动作。每一种动作都是通过两个整数来确定——第一个数说明列的数（正数向右，负数向左），第二个数说明行的数（正数向上，负数向下），移动马来完成这个动作。

任务

编写一个程序

从文本文件 SUP.IN 输入说明各种超级马的数据库。

对每一个超级马进行确认，是否通过自己的行动可以到达盘面上的每一个区。

将结果存储到文本文件 SUP.OUT。

输入

在文本文件 SUP.IN 的第一行中存在一个整数 k，它代表数据库的数 $1\le k\le 100$。在这个数字后出现 K 数据库。它们的每一个第一行中会出现整数 N，它是马能够完成的各种动作的数，$1\le n\le 100$。接下来数据库的每一个行中包含两个整数 P 和 Q，它们由单个空格分开，说明动作，$-100\le p, q\le 100$。

输出

文本文件 SUP.OUT 应由 K 行组成，当第 i 个数据库的超级马可以到达盘面的每一个区，第 i 行应包含一个词 TAK，而另一个词 NIE 则恰恰相反。

输入样例

```
2
5
2 4
2 2
-3 -3
4 3
1 3
5
1 -3
```

2 1
4 1
4 -2
2 -2

输出样例

TAK
NIE

2.1 确定算法模型。

看到题目，最容易想到的算法是广搜。从当前已知能够到达的格子出发，按照马的走法，扩展出另外一些能到达的格子，一直扩展下去，最后判断是不是扩展完了所有的棋盘。

很快会发现这种做法是不行的，棋盘上格子的个数是无限的，不能判断能够到达所有的格子。但这个困难马上就有了解决的办法，显然只要判断超级马是否能到达开始点的 4 个相邻格。因为如果能够到达这 4 个格子，那么必然能够到达棋盘上的任意一个位置。

问题解决了没有？没有。虽然最终目标只需要判断四个格子，但是，它在走到这 4 个格子的过程中经过的点可能会有很多个。更糟糕的是，当问题无解时，无法进行正确的判断，最后实现算法时造成死机。

如果把无限的棋盘变成相当大的有界棋盘，看它在这个有界棋盘上能否到达这 4 个格子。但这仍然是无用功，这个有界棋盘会有很大，这样时间效率很低，算法也缺乏证明。

尝试各种图论算法、动态规划、贪心等，最后都以意料之中的结果——失败而告终。

要得到高效的算法，似乎只有一条出路：数学思想。

要用数学思想解题，先要建立数学模型。以超级马最开始的格子为原点建立平面坐标系。然后把马的一种动作用一个平面向量 P_i 来表示，$P_i=(x_i,y_i)$。那么，我们要判断，对于任意的 x,y，是否都存在一组 $c_1,c_2,c_3\ldots\ldots c_n$($c_i>=0, 1\le i\le n$)，使得 $\sum_{i=1}^{n} c_i P_i = (x,y)$。

于是，就确定了这题的数学模型：解方程。

进一步，只需要判断(x,y)为(-1,0)，(1,0)，(0,-1)，(0,1)的情况。而这四种情况是一样的，可以只考虑(0,1)。那么，要判断下面的方程是否有非负整数解：

$$c_1P_1 + c_2P_2 + ... + c_nP_n = (0,1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{方程①}$$

例如，题目中样例的第 1 个数据 n=5,5 个向量是 P_1=(2,4), P_2=(2,2), P_3=(-3,-3), P_4=(4,3), P_5=(1,3)，那么方程①的一个非负整数解就是：

3(2,4)+5(2,2)+13(-3,-3)+5(4,3)+3(1,3)=(0,1)。

2.2 "放大"目标。

这是一个线性方程，未知数比较多，而方程只有一个。直觉告诉我们，如果方程有解的话，那么解的数量应该是非常多的，很有可能是无穷多个。从构造出一组解的角度进行思考是比较明智的选择。

当尝试了各种各样的构造方法后，发现有两个因素影响着我们的构造：一个就是，要使右边向量的 Y 值达到 1；另一个就是，要使左边的系数 c 都非负。摆在面前的就是两块重石，我们必须把它搬开，两块一起？太重了！对，可以一块一块的来！这样，先构造出一个解，使得方程①的右边等于(0,1)，而左边的每一个系数 c 只需要都是整数。

于是，确定了一个放大的目标：求方程整数解。

要构造出整数解还是很困难，不妨从简单的情况开始考虑，n=2，$P_1=(x_1,y_1)$，$P_2=(x_2,y_2)$，（为了叙述方便，假设 $x_1,y_1,x_2,y_2\neq 0$）超级马能不能够到达(0,1)呢？首先，两个系数 c_1,c_2 要满足 $c_1x_1+c_2x_2=0$，令 $m(m>0)$是$|x_1|,|x_2|$的最小公倍数，设 $c_1=m/x_1, c_2= -m/x_2$，那么 $W=c_1P_1+c_2P_2$ 就是一个能由 P_1,P_2 得到的竖直向量了，并且它是这中间模最小的向量。如果 W 可以由两个向量 P_1,P_2 构造出来（即存在整数 c_1,c_2 使 $c_1P_1+c_2P_2=W$），那么对于任意的整数 k，kW 都可以由 P_1,P_2 构造出来。如果|W|=1，两个向量的情况就有整数解；相反，如果不等于 1，没有整数解。

解决了两个向量的情况后，回到 n 个向量的情况，自然而然的，就会萌生出一种想法：用两个向量得出的竖直向量构造出其它的竖直向量。

上面用了 P_1,P_2 构造了一系列的竖直向量 kW，设这些向量的 Y 坐标组成的集合为 $S_{1,2}$，那么，对于任意两个不同的 $P_i,P_j(i<j)$，都可以构造出一个 $S_{i,j}$。

仍然可以看样例的第一个数据，n=5,P_1=(2,4), P_2=(2,2), P_3=(-3,-3), P_4=(4,3), P_5=(1,3)，不难得出：

	2	3	4	5
1	$\{2k\mid k\in Z\}$	$\{6k\mid k\in Z\}$	$\{5k\mid k\in Z\}$	$\{2k\mid k\in Z\}$
2		$\{0\}$	$\{k\mid k\in Z\}$	$\{4k\mid k\in Z\}$
3			$\{3k\mid k\in Z\}$	$\{6k\mid k\in Z\}$
4				$\{9k\mid k\in Z\}$

把所有的 $S_{i,j}$ 合起来，看超级马还能够到达 Y 坐标上的哪些地方。这样定义 Y 坐标集合 S:

a、如果存在 i,j 使得 $Y\in S_{i,j}$，那么 $Y\in S$;

b、如果 $Y_1\in S$, $Y_2\in S$，如果 $Y=k_1y_1+k_2y_2$（$k_1,k_2\in$ Z）那么，$Y\in S$。

c、除去 a、b 定义外的其它 Y 都不属于 S。

实际上，S 集合就是能够由 $S_{i,j}$ 中的数通过加减运算得到的数的集合。

由模的知识可以得到，S 也是一个$\{kY\mid k\in Z\}$形式的集合。其中，Y 等于所有 $S_{i,j}$ 中的数的最大正公约数。如果 Y=1，那么，方程①就有整数解了！可以得出，上表中 $S=\{k\mid k\in Z\}$，所以可以构造出一个整数解。例如， 取 $S_{1,2}=\{2k\}$，$S_{4,5}=\{9k\}$，因为它们他们的模的最大公约数是 1，-4*2+9=1，所以，$-4(P_1-P_2)+(4P_5-P_4)= -4P_1+4P_2-P_4+4P_5$。

所以，解决了求整数解问题的一半，得出了方程①有整数解的一个充分条件。

但是，上面的构造只是一个充分条件，这个是不是必要的呢？也就是说,如果一组 P 对方程①有整数解 c_1，c_2，…..c_n，是不是(0,1)一定可以由若干个 Y 坐标属于某个 $S_{i,j}$ 的竖直向量通过加减运算得出来？答案是肯定的！有下面结论：

结论 2.2.1：可以把方程①的左边等价的分成若干个多项式的和，每一个多项式最多有两个单项式，并且每一个多项式的和是一个竖直向量。

例如，3(2,4)-13(2,2)+9(-3,-3)+11(4,3)+3(1,3)=(0,1)。可以变成

[3(2,4)-3(2,2)]+[-10(2,2)+5(4,3)]+[9(-3,-3)+27(1,3)]+[6(4,3)-24(1,3)]=(0,6)+(0,-5)+(0,54)+(0,54)=(0,1)。

下面用归纳法证明这个结论：

如果 $n\le 2$，那么左边就是一个最多有两个单项式的多项式，结论显然成立。

假设 n=k-1 时成立，下面要证明 n=k 时也是成立的

证明只需要关心的是 P 的 x 部分，而不需要关心 y 部分。转化一下后，因为 $\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = 0$，如果存在这样的数列 u,v，使得上面的式子可以等价的变成 $\sum_{i=2}^{k}(u_i x_i + v_i x_1) + \sum_{i=2}^{k}(c_i - u_i)x_i = 0$，其中 $u_i x_i + v_i x_1 = 0$，$\sum_{i=2}^{k} v_i = c_1$，那么就可以从式子的左边拿出 k-1 个多项式 $u_i x_i + v_i x_1$（$1\leqslant i\leqslant k-1$），这些多项式都不超过两项，并且和为 0。

可以设所有 x 的最大公约数是 1，如果不是，把它们都除以这个公约数就可以了，对 u 和 v的取值没有影响。设 $g_i=\mathrm{lcm}(x_i,x_1)/x_1$，($i$>=2)，不难得出，$g_i|x_i$，令 $g=\gcd(g_2,g_3\ldots\ldots g_k)$，那么 $g|x_i$（i>=2）。所以由所有 x_i 的最大公约数是 1 得出，g 与 x_1 互质。又因为 $g\mid\sum_{i=2}^{k} c_i x_i$，所以，$g|(c_1x_1)$，即 $g|c_1$。

所以存在整数序列 $d_2,d_3\ldots\ldots d_k$ 使 $\sum_{i=2}^{k} d_i g_i = c_1$，令 $v_i = d_i g_i$，$u_i = -v_i x_1 / x_i = -d_i g_i x_1 / x_i = -d_i \,\mathrm{lcm}(x_1, x_i)/x_i$，就得出了这样的序列 u,v。

所以就证明了结论 2.2.1。

这样，通过一步一步的运算与证明，完成了这个问题的第一步：求出了方程①有整数解的充要条件了。以下是得出的结论：

结论 2.2.2：方程①有整数解的充要条件是，能够用这样的竖直向量 W 通过加减运算得到：存在 i，j，k_1，k_2（$1\leqslant i<j\leqslant n$，$k_1,k_2\in Z$），使得 $k_1P_i+k_2P_j=W$。

2.3、瞄准目标。

如果其它的 3 个向量(0,-1),(-1,0),(1,0)也进行了同样的判断后，就可以判断方程有没有非负整数解了。而且下面的结论的一个大前提就是，方程已经有了一组整数解。不过为了下面的叙述和证明变得更简便，还可以设向量中有一个 x 坐标为正，也有一个为负，y 坐标也是一样。

既然求方程的整数解的那种思路得到较好的效果，那么就可以继续使用来求非负整数解。综合起来，前面思路用到了两个技巧，**一个就是从两个向量入手，第二个就是先构造出一组解，并且得出方程有解的充分条件，再证明这一个充分条件的必要性。**

先从两个向量开始考虑。不过这时，因为要求的是非负整数解，所以范围由原来的整数变成了非负整数。

按照定义 $S_{i,j}$ 的方法定义 $T_{i,j}$，即，如果一个竖直向量 W 可以表示成 $k_1P_i+k_2P_j$（$k_1,k_2\in N$）的形式，那么 W 的 Y 坐标就属于 $T_{i,j}$，显然，如果 P_i，P_j 的 x 方向相同那么 $T_{i,j}$ 就是空集。

还是看 $n=5,P_1=(2,4),P_2=(2,2),P_3=(-3,-3),P_4=(4,3),P_5=(1,3)$。那么同样得出下表：

	2	3	4	5
1	{}	$\{6k\|k\in N\}$	{}	{}
2		{0}	{}	{}
3			$\{-3k\|k\in N\}$	$\{6k\|k\in N\}$
4				{}

定义集合 T:

a、如果存在 i,j 使得 $Y\in T_{i,j}$，那么 $Y\in T$;

b、如果 $Y_1\in T,Y_2\in T$，如果 $Y=k_1Y_1+k_2Y_2$，(k_1,k_2 是非负整数)，$Y\in T$。

c、除去 a、b 定义外的其它 Y 都不属于 T。

不难看出，T 集合是 $T_{i,j}$ 通过加法运算得出来的竖直向量纵坐标的集合。

上面的例子也可以得出 $T=\{3k|k\in Z\}$。

那么，是不是如果(0,1)$\in T$ 就可以了呢？显然不是，否则，还要上面求整数解的过程干什么？要找反例也很容易：$P_1=(3,0)$，$P_2=(-1,1)$，$P_3=(-1,-1)$，它能够到达所有的点，但是 T 中只有长度是 3 的倍数的纵向量。显然，需要要利用到上面整数解的结论。

现在，已经得出了方程的一个整数解，怎样来找到一个非负整数解。一种想法就是：调整。不断的在方程的左边加上 0 向量，使每一项的系数都变大了；或者先使左边的系数都是正数，再用得到的整数解来使得右边变成 1，通过这样的想法来构造后，可以得出结论：

结论 2.3.1：如果 T 中有一个正数，有一个负数，那么方程①一定有非负整数解。

证明：只要构造一个非负整数解就可以了。因为所有的向量中，有一个 x 为正，有一个 x 为负，所以一定可以存在着一个正整数序列 $d_1,d_2\ldots\ldots d_n$，使得 $\sum_{i=1}^{n} d_i x_i = 0$，其中，$d_i$ 都非常大。另外，由于 T 中有一个正数，也有一个负数，所以就在 T 中间找出一个数，使得它与 $M=\sum_{i=1}^{n} d_i y_i$ 的和达到最接近于 0，把它加到 M 中，各项的系数加到右边。那么再用求出的(0,1)或者(0,-1)的整数解，把它们的系数与加到右边，使得 M 变成 1。因为前面的 d 都非常大，后面加的负数相对于前面数很小，保证了所有的系数都是非负整数。所以，它一定有非负整数解。

按照上面的步骤，来构造样例的第一个数据。$n=5$, $P_1=(2,4)$, $P_2=(2,2)$, $P_3=(-3,-3)$, $P_4=(4,3)$, $P_5=(1,3)$。

首先选择序列 d，每一项的系数都非常大，这里设它(9,9,27,9,9)，因为 $9*2+9*2+27*(-3)+9*4+9*1=0$，$M=9y_1+9y_2+27y_3+9y_4+9y_5=27$。然后，选择 T 中的正数-27，因为 $(0,-27)=9(4P_3+3P_4)=36P_3+27P_4$，把 $36y_3+27y_4$ 加到 M 中，这样，就得出，$M=9y_1+9y_2+63y_3+36y_4+9y_5=0$。然后，再用原来得出关于的整数解 $-4P_1+4P_2-P_4+4P_5=(0,1)$，把 $-4y_1+4y_2-y_4+4y_5=1$ 加到 M 中，有 $M=5y_1+13y_1+63y_3+35y_4+13y_5=1$。即 $5P_1+13P_2+63P_3+35P_4+13P_5=(0,1)$ 就是所求的一组整数解。

接下来就只需要证明：

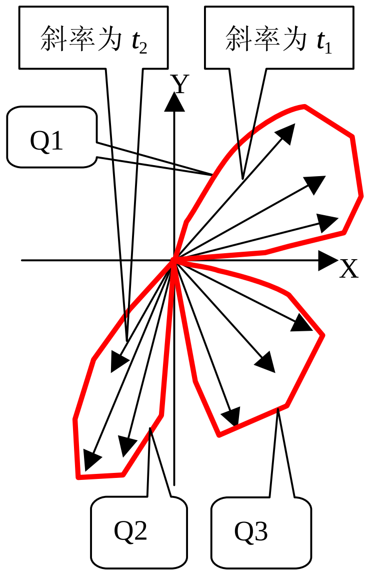
结论 2.3.2：如果方程①有非负整数解，那么它一定存在 $P_i,P_j,k_1,k_2(>=0)$ 使得 $k_1P_i+k_2P_j$ 是 Y 方向正半轴上的向量。

证明：为了叙述简便，设这些向量里面没有水平的或者竖直的向量，即没有 x 为 0 或者 y 为 0 的向量。用反证法，假设没有这样的 P_i,P_j,k_1,k_2，那么，P 向量中不可能既出现向量(a,b)，又出现向量$(-c,d)$，其中 a,b,c,d 都是正整数，因为这两个向量一定可以构造出一个 Y 方向正半轴上的向量。不失一般性，可以假设只有(a,b)的形式，可以设 Q_1 表示这样的向量

的集合。还有一些形如(-a,-b)的向量，设这些向量组成的集合为 Q_2，除了 Q_1 和 Q_2 外的向量属于 Q_3，即(a,-b)形式的。可以看出，Q1，Q2 一定都不为空，那么，必然有：

$t_1=\max\{y_i/x_i,(x_i,y_i)\in Q_1\}<\min(y_i/x_i,(x_i,y_i)\in Q_2)=t_2$，从下面的图可以直观的看出上面定义的 Q_1，Q_2，Q_3，t_1，t_2，也可以感受到这样不可能到达 Y 轴的正半轴。

$$
\begin{aligned}
0 &\ge -\sum_{Pi\in Q3} c_i x_i = \sum_{Pi\in Q1} c_i x_i + \sum_{Pi\in Q2} c_i x_i \\
&\ge \sum_{Pi\in Q1} c_i x_i * (y_i/x_i)/t_1 + \sum_{Pi\in Q2} c_i x_i * (y_i/x_i)/t_2 \\
&> \sum_{Pi\in Q1} c_i y_i/t_2 + \sum_{Pi\in Q2} c_i y_i/t_2 \\
&= (\sum_{Pi\in Q1\cup Q2} c_i y_i)/t_2 \\
&= (-\sum_{Pi\in Q3} c_i y_i)/t_2
\end{aligned}
$$



因为 $t_2>0$，所以 $\sum_{Pi\in Q3} c_i y_i > 0$，这与 Q_3 里向量的形式是(a,-b)矛盾。

所以，结论 2.3.2 是正确的。

于是，得到了问题最后的算法，下面是主要过程的伪代码:

```
步骤 1：
g ß 0;
For (Pi 是竖直向量) Do g ß gcd(g,|yi|);
For (Pi 不是竖直向量) Do Begin
   For (Pj 不是竖直向量) Do Begin
      t ß gcd(|xi|,|xj|);
      len ß |Pi*xj/t-Pj*xi/t|;
      g ß gcd(g,len);
   End For;
```

```
步骤 2：
positive ß false;negative ß false;
For (Pi 是竖直向量) Do Begin
   If yi>0 Then positive ß true Else negative ß true;
End For;
For (Pi 不是竖直向量) Do Begin
   For (Pj 不是竖直向量且 xi 与 xj 符号不相同) Do Begin
      W=Pi*|xj|+Pj*|xi|;
      If W 是 Y 方向正向量 Then positive ß true;
      If W 是 Y 方向负向量 Then negative ß true
   End For
End For
If Not positive Or Not negative Then Begin 输出('NIE');halt; End If;
```

步骤 3：
交换每一个向量的 x 值与 y 值，重复作步骤 1，步骤 2；
输出(‘TAK’)

2.4、小结

上面的例子首先是要求方程的非负整数解，而方程直接求出非负整数解不好求，而求出一个整数解就相对较容易，所以首先把目标放大成了求解整数解。然后再由整数解构造出非负整数解。由此可见，这道题在算法中用了目标转化。把求非负整数解变成求整数解是解决这道题的关键。

在求解整数解和非负整数解的过程中，也不是直接得出一个充分必要条件的，而是首先构造出一个充分条件，再证明它的必要性。

三、在思路中应用目标转化

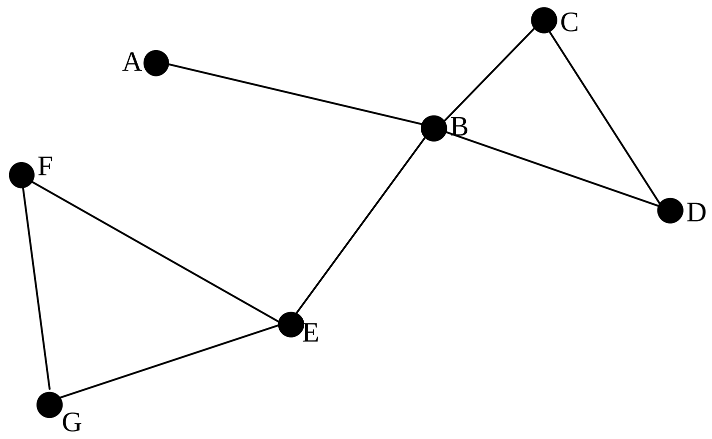
由于题目的复杂性，我们的思路很容易变混乱，想要跳出来，但很难找到突破口。不妨尝试着转化目标，在转化的目标中进行思考，这种方法，使我们有了正确的思考方向，思路一下就清晰起来。例如，最常见的就是要考虑一个三维空间里的问题，就可以[1]把它降到二维平面中来，然后再由平面推广到空间。此外，还有把一般的图特殊化等等。下面通过一道题来看一看目标转化思想对理清思路的威力。

[例 2]棋盘游戏①

给定一个棋盘。棋盘是一个无向图，有 n 个节点，(1≤n≤100)m 条无向边。两个人甲、乙。开始时，甲把一个棋子放在某一个节点上，然后乙、甲轮流移动棋子，乙先移。每一次只能移动到与现在棋子所在节点有边的节点，如果某一个人移动到了棋子原来到过的节点或者没有地方能够移动了，那么，他就输了。

现在，给定一个棋盘，需要判断甲最开始把棋子放在哪一个位置有必胜策略。例如如下的棋盘，A、E、F、G 有必胜策略。

① 原创试题



例如，甲把棋子放在 A 时，乙只能把棋子移到 B，那么，甲把棋子移到 E，如果乙再移到 G，那么，甲把棋子移到 F；如果乙移动到 F，甲就把棋子移动到 G，乙都没有地方可以移动了，所以甲有必胜策略。

3.1、缩小范围、改变目标

这道题是一道简单的博弈题，说它简单，并不是题目简单，是因为它描述很简单，博弈的规则也很简单。对于一般的博弈，采用的是博弈树，但是，对于这一道题来说，状态数是指数级别的，直接用博弈树是比较困难的。

如果把这一个棋盘看成是一个无向图，那么，这就是一个很一般的图，没有任何的限制，讨论起来比较困难。这样，我们就可以缩小图的范围，给它来一些限制。

什么限制呢？看一道类似的 POI 的 GreenGame 这一道题，那也是一个博弈游戏，这两题有什么相似之处呢？相似之处很多，都是博弈，都是在一个图上的博弈，但是，这题和 Greengame 却有一个很大的不同！那就是这道题的图是一般的图，而 Greengame 却是一个二分图。

正因为如此，我们想尝试着把图简化成二分图，这样有什么好处呢？

因为这样，就可以保证当棋子到达某一个位置时一定是轮到某一个人走棋了。还有更重要的原因就是，某一个节点的存在一定是对某一个人有利，而对另一个人不利的。

首先，设这一个二分图 G=(A,B,E)，其中 *A*、*B* 是点的集合，*E* 是边的集合，并且 E 中边连的两个点一定是一个在 A 中，一个在 B 中。不失一般性，设甲最

开始时只可以把棋子放在 A 的点中。并且可以这样讲，A 是属于甲的，B 是属于乙的。所以，每一次移动都是一个人将棋子从属于对方的节点移动到属于自己的节点。

所以从宏观上来看，A 中的格子越多，对甲就越有利。

3.2、在转化后的目标上不断猜想、证明

和一般的博弈一样，这个问题先规定胜点和败点：棋子最开始在某一个节点上（可以是 A 中，也可以是 B 中，这时，第一次是谁移动就已经确定了），如果这个节点的拥有者（A 的拥有者是甲，B 的拥有者是乙）有必胜策略，那么，就规定这是一个胜点，否则它是败点。于是，开始研究胜点与败点的规律，从胜点下手，一步一步地来它们是什么样的关系。

结论 3.2.1：同一条边连接的两个点不可能都是胜点。

如果 $p\in A,q\in B,(p,q)\in E$，p 是胜点。那么如果最开始棋子在 q 上，那么甲可以把它从 q 移到 p。对于乙来说，它希望以前走过的属于 B 的节点越少越好。而以前没有走过 q 点时从 p 出发他都没有胜算(那是甲的胜点)，那么现在 q 点已经不能走了，还是从 p 点出发，就更不可能有胜算了，所以，q 必然是败局。

结论 3.2.2：如果 p 是胜点，$(p,q)\in E$，根据结论①，q 是败点。必然存在一个点 $u,(u,q)\in E$，$u\neq p$，使得 u 相对于图 G-p-q(G 删除 p,q 及其与它相关连的边后得到的图)是胜点。

根据一个胜局后一定有一个败局，这个就是相当容易的了。

上面的结论给了我们思考的方向，如果一个 A 中的点是胜点 p，那么，不管下一步 B 往哪个点 q 走，A 都找到了一个与他相邻的点 m(q)，使得这个点在去掉已经走过的点的图中是胜点。

到了这一步，我们不得不想，m(q)可不可以在最开始就求出来，或者说，m(q)只与开始的图有关，不管以后怎样变化，m(q)都可以是一个定点？如果是，那么怎样求出 m(q)？

这一次，避开第一个问题，而是直接假设答案是肯定的，接下来从甲的博弈方式入手，求出 m(q)。

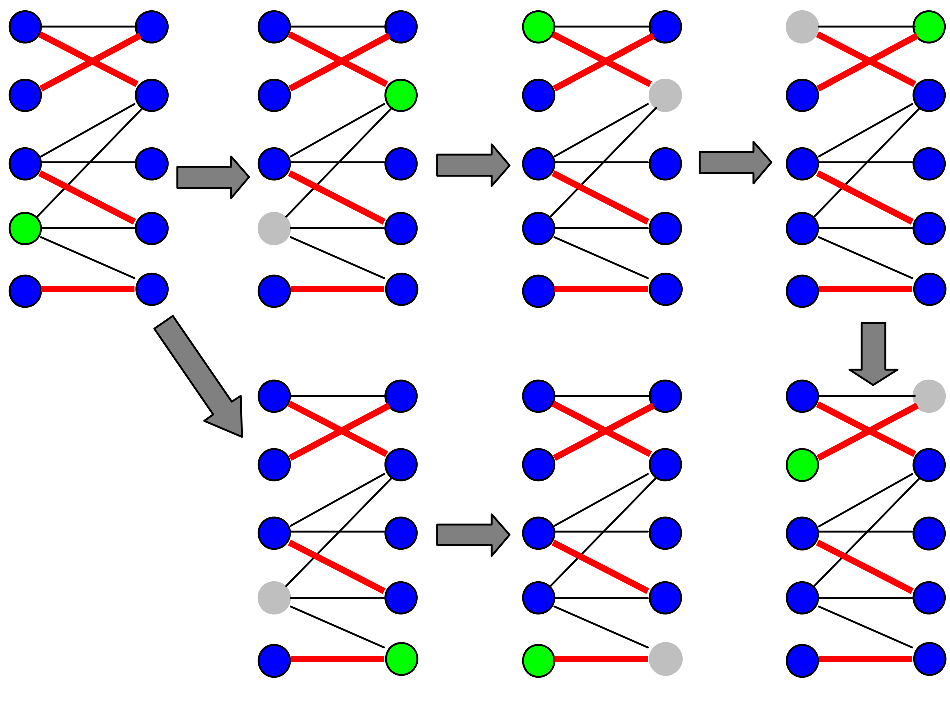
在甲心中，对于 B 中的一些点 q 已经求出了一个 m(q)，每一次乙把棋子移

到这个点 q 时，甲下一步就把棋子移到 m(q)（相对于去掉简化后的图）中，如果对于不同的 q，甲就有不同的 m(q)，那么，这种方法就显然是可行的。但是，怎样保证两个败点对应的胜点不同呢？二分图的一个匹配！

那么在甲心中，已经想好了一个匹配 m，这个匹配 m 不包含棋子最开始所在的点。甲还是按 m 的标记移动棋子。但是，并不是每一个 B 中的点 q 都有一个匹配，如果最后走到一个没有匹配的 q 点怎么办？从棋子所在点出发，到 B 中的点，再到这个点匹配的 A 中的点，再到一个 B 中的点，再到与它匹配的 A 中的一个点……这样一直下去，最后居然到了一个没有匹配的 q! 从一个没有匹配的 A 中的点交替的沿着匹配边与非匹配边，最后到达了一个没有匹配的点——这就是一条增广轨！

于是，甲的心中的匹配 m 就需要保证不存在这样的增广轨，不存在增广轨的匹配——最大匹配。

这样，如果甲把棋子放在一个没有匹配的节点上，按照上面的走法，就必然能够取胜，换句话说，在这个最大匹配中没有匹配的 A 中的点一定是胜点！例如下图，红边描述了一个最大匹配，绿色的节点表示当前棋子所在的位置，灰色的点表示已经走过的节点，其余的节点用蓝色表示，箭头表示的一棵树（实际上是博弈树的一个部分）就反映了甲的走法：



由于最大匹配不止一个，在甲心中可以任意默认一个，这样，求出了一个点是胜点的充分条件:

结论 3.2.3：如果存在一个最大匹配没有覆盖 p(∈A)点，那么 p 一定是胜点！

接下来的问题也就很简单了，需要证明的显然是这个充分条件的必要性：

结论 3.2.4：如果任意一个最大匹配都会覆盖 p(∈A)点，那么 p 一定是败点！

证明：证明从乙的角度来考虑。在乙心中同样有一个最大匹配，这个最大匹配一定包含了 p 点，那么每一次，他都把棋子移到当前所在位置匹配的位置。如果有一个点没有匹配了，那么，就从 A 中一个有匹配的点 p 出发，匹配边与非匹配边交替，最后到达了一个 A 中没有匹配的点！如果把这条链中匹配边与非匹配边交换，又得到了一个匹配，由于匹配的边没有变化，他仍然是最大匹配，但是这一个最大匹配却不包含 p 点！这与以一个最大匹配都覆盖 p 点矛盾，所以不可能，即 p 一定是败点。

到了这里，发现上面的第一个问题是正确的，于是解决了二分图的情况.

3.3、回到原来的问题

解决了二分图的问题，就回到一般图。这时，任意一个点都可以属于任何一个人，如果再用上面的讨论就不行了。但是，基于二分图的结论猜测，结论 3.2.4 和 3.2.3 是否对任意的图都成立?不难发现这是正确的。

在甲心中有一个最大匹配，首先，他把棋子放在一个没有匹配的边上，每一次乙把它移到一个点时，他只要下一步把棋子移动到它相匹配的节点上就可以了。如果有一个节点没有匹配，那么找到了一条增广轨，而这是不可能的！

关于任意图的最大匹配，可以参看书籍[1]中带花树的介绍。

3.4、小结

上面的例子，二分图在最终的算法中没有起到任何的作用，但是在思考过程中，它却带来了很大的方便。思路变得十分清晰，各种猜测，各种证明，都变得简单。可以说，当把问题缩小到二分图后，就已经解决了问题的一半。

大多数情况下，不会像上面的例题一样，转化后的目标的结论就是原来的

结论，往往还有经过一些猜测、推广的过程，甚至有时。转化后的目标与原来的问题相差甚远，很难推广。但是，转化目标对思维的导航作用是无可否认的。

四、总结

从上面可以看出，转化目标的目的就是:使问题变得简单！不管是算法的需要，还是思维的需要。它提供了解决问题的一般方向：由易入难、由简单到复杂、由浅入深、由特殊到一般，这也符合人思维的方向。那么，怎样才能灵活自如的运用它们？没有明确的答案，不过有几点很重要：

敢于猜想、联想。

敢于类比、找出相似点。

敢于拓展、在已解决的问题上发现新的问题。

最后，熟练与灵活还是来源于实践，只有多动手，多动脑，才能达到运用自如的境界。

【感谢】

金恺、胡伟栋、何林及向期中老师热心的帮助。

【参考文献】

[1] 《青少年国际和全国信息学奥林匹克竞赛指导——图论的算法与程序设计》

吴文虎　王建德　编著

[2] 《实用算法的分析与程序设计》

吴文虎　王建德　编著