数学相关知识

余林韵

2008 年 1 月 22 日

1 数列的定义

按照一定的次序排列的一列数叫做数列。实际上，从函数观点看，对于一个定义域为正整数集 $\mathbf{N}^*$ 或它的有限子集 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的函数来说，数列就是这个函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值。

2 通项与递推

通项公式与递推公式，是给出一个数列的两种重要方法。在信息学问题中，数列一般是用递推公式给出或是利用递推公式来求解的。

2.1 通项公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与 n 之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的 **通项公式**。

2.2 递推数列

2.2.1 递推数列

一个数列的连续项之间的关系叫递推关系，由递推关系确定的数列叫递推数列。

2.2.2 k 阶递推数列

由初始值和方程 1确定的数列 $\{a_n\}$ 称为 k 阶递推数列。

$$a_{n+k} = F(a_{n+k-1}, \ldots, a_n) \tag{1}$$

特别地，当 1的形式为 2时，数列 $\{a_n\}$ 称为 k 阶常系数线性递推数列。这里 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 为常数，且 $c_k \neq 0$ 。若函数 $f(n) = 0$ ，则称由 2确定的数列 $\{a_n\}$ 为 k 阶常系数齐次线性递推数列。

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n + f(n) \tag{2}$$

2.3 等比数列

满足递推式 $a_{n+1} = q a_n$ (其中 q 为非零常数)的数列叫做等比数列。常数q叫做等比数列的公比（$q \neq 0$）。

因为在一个等比数列$\{a_n\}$里，从第二项起，每一项与它的先一项的比都等于公比 q，所以每一项都等于它的前一项乘公比q，于是有：

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3$$

$$\ldots$$

由此得到

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

公比不为1的等比数列的前 n 项和：令 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ，则：

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}$$

$$q S_n = 0 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

所以：

$$(1-q) S_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n = a_1 (1 - q^n)/(1 - q)$$

满足递推式 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ 的数列叫做等差数列。它和等比数列是最简单的递推数列。

3 周期数列

3.1 周期数列的概念

a) 对于数列 a_n ，如果存在确定的自然数 T 及 n_0 ，使对一切 $n \geqslant n_0$ ，恒有 $a_{n+T} = a_n$ 成立，则称 a_n 是从第 n_0 项起的周期为 T 的周期数列。当 $n_0 = 1$ 时，称 a_n 为纯周期数列；当 $n_0 \geqslant 2$ 时，称 a_n 为混周期数列。

b) 设 $\{a_n\}$ 是整数数列，m 是某个取定的大于 1 的自然数，若 b_n 是 a_n 除以 m 后的余数，即 $b_n \equiv a_n(\mod m)$ ，且 $b_n \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ ，则称数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 关于 m 的模数列，记做 $a_n(\mod m)$ 。

若模数列 $\{a_n(\mod m)\}$ 是周期性的，则称 $\{a_n\}$ 是关于模 m 的周期数列。

3.2 关于周期数列的重要性质与结论

a) 周期数列是无穷数列，其值域是有限集。

b) 若 T 是 $\{a_n\}$ 的周期，则对任何 $k \in N^*$ ，kT 也是 $\{a_n\}$ 的周期。

c) 周期数列必有最小正周期。

d) 若 T 是周期数列 $\{a_n\}$ 的最小正周期，T' 是 $\{a_n\}$ 的任一周期，则 $T|T'$ 。

e) **任一满足线性递推关系**

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n + f(n)$$

的 k 阶常系数齐次线性递推数列是模周期数列。特别的，Fibonacci 数列 $\{a_n\}$ ： $\{a_0 = a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (n \geqslant 1)\}$ ，对于任意自然数 $\{a_n(\mod p)\}$ 是纯周期数列。

4 数学归纳法

4.1 数学归纳定理

如果对于自然数 n 的某个命题 P(n) 具备下列条件：

(1) P(1) 真。

(2) 如 P(k) 真，则 P(k+1) 真。

那么对于一切 $n \in N_+$ ，P(n) 真。

从上面的定理我们可以看到，用数学归纳法证明一个与自然数有关的命题的步骤是：

(1) 证明当 n 取第一个值 n_0(例如 $n_0 = 1$ 或 $n_0 = 2$) 时结论正确。

(2) 假设当 $n = k(k \in N_+$ 且 $k \geqslant n_0)$ 时结论正确，证明当 $n = k + 1$ 时结论也正确。

在完成这两个步骤以后，就可以断定命题对于从 n_0 开始的所有自然数 n 都正确。

4.2 第二数学归纳法

如果对于自然数 n 的某个命题 P(n) 具备下列条件：

(1) P(1) 真。

(2) $k \in N_+$ 如 $n \leqslant k$ 时，P(n) 真，则 P(k+1) 真。

那么对 $n \in N_+$ ，P(n) 真。

4.3 反向归纳法

反向归纳法又称为倒退归纳法，是由法国数学家 Cauchy 首先使用的。下面给出反向归纳法：设 P(n) 是关于自然数 $n \in N_+$ 的命题，若：

(1) P(n) 对无限多个自然数 n 成立。

(2) 假设 P(k+1) 成立，可推出 P(k) 成立。

那么命题 P(n) 对一切 $n \in N_+$ ，都成立。

4.4 跷跷板归纳法

设 P(n),Q(n) 是两个与自然数 $n \in N_+$ 有关的命题，如果：

(1) P(1) 成立。

(2) 假设 P(k) 成立，可推出 Q(k) 成立；假设 Q(k) 成立，可推出 P(k+1) 成立。

则对所有 $n \in N_+$ ，P(n),Q(n) 都成立。

4.5 二重数学归纳法

在证明于两个独立的自然数有关的命题 P(m,n) 时，可以用如下形式进行：

(1) 证明 P(1,m) 对任意自然数 m 成立，P(n,1) 对任意自然数 n 成立 $(m, n \in N_+)$ 。

(2) 假设 P(n+1,m) 和 P(n,m+1) 成立，由此推出 P(n+1,m+1) 成立。

则对所有正整数 m,n ，P(m,n) 成立。这种方法称为二重数学归纳法。