动态规划之四边形不等式优化

浙江省镇海中学 贺洪鸣

【四边形不等式】

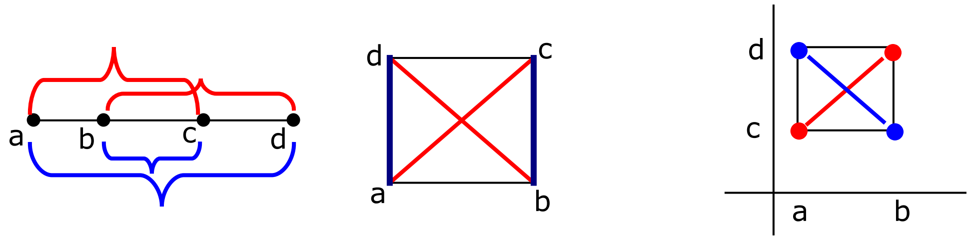
1．对于 a≤b≤c≤d,如果 w[a,c]+w[b,d]不比 w[a,d]+w[b,c]差,则称 w 满足四边形不等式。

2．所谓 w[a,c]+w[b,d]不比 w[a,d]+w[b,c]差，是指：

（1）如果求最小值问题时，指 w[a,c]+w[b,d]≤w[a,d]+w[b,c]

（2）如果求最大值问题时，指 w[a,c]+w[b,d]≥w[a,d]+w[b,c]

【区间包含的单调性】如果区间[a,b]⊆[c,d]，则 w[a,b] ≤w[c,d]



w[a,c]+w[b,d] 比 w[a,d]+w[b,c] 优的三种解释

【例 1 石子合并】NOI’1995

在一个操场上摆放着一排 n(1≤n≤1000)堆石子，现要将石子有次序地合并成一堆。规定每次只能选相邻的 2 堆石子合并成新的一堆，并将新的一堆石子数记为该次合并的得分。

求将 n 堆石子合并成一堆的最小得分和最大得分。(每堆石子数为 1 至 1000 间的正整数)

【初步分析】

以求最小得分为例（最大得分只要将最优性的定义从求最小值改为最大值即可）：

1．状态定义：

（1）以 w[I,j]表示第 I 堆至第 j 堆石子的总数

（2）以 f[I,j]表示将第 I 堆至第 j 堆石子合并为一堆能得到的最小得分

（3）所求为 f[1,n]

2．状态转移方程：

$f[i,j]=\mathop{Min}\limits_{i+1\le k\le j}(f[i,k-1]+f[k,j]+w[i,j])$，初值 f[I,I]=0,I=1~n

状态有 $O(n^2)$个，每个状态的决策 O(n)，总时间复杂度为 $O(n^3)$的。

记 k=s[I,j]为 f[I,j]取得最优值时的**最大**决策。即 f[I,j]=f[I,k-1]+f[k,j]+w[I,j]，且：

(1)当 p<k 时，f[I,p-1]+f[p,j]+w[I,j]≥f[I,k-1]+f[k,j]+w[I,j]

(2)当 p>k 时，f[I,p-1]+f[p,j]+w[I,j]>f[I,k-1]+f[k,j]+w[I,j]

【定理 1】

对于任意的整数 a≤b≤c≤d,如果 w 函数满足四边形不等式， w[a,c]+w[b,d]≤w[a,d]+w[b,c]，则 f 函数也满足四边形不等式，即 f[a,c]+f[b,d]≤f[a,d]+f[b,c]

【定理 2】

对于任意满足 a≤b≤c≤d 的正整数 a,b,c,d,如果 f 函数满足四边形不等式 f[a,c]+f[b,d]≤f[a,d]+f[b,c]，则决策 s[I,j]关于 I 和 j 均单调不降，即 s[I,j-1]≤s[I,j]≤s[I+1,j]

本例中,w 函数显然满足四边形不等式(事实上 w[a,c]+w[b,d]=w[a,d]+w[b,c])，因此，

如果定理 1 和定理 2 成立，则决策 s[I,j]关于 I 和 j 单调不降。

我会在稍后给出定理 1 和定理 2 的证明。

【推论 1】

对于所有形如 f[i,i+L](1≤i≤n-L)的状态，它们的决策次数总和不超过 n。

证明：对于求 f[i,j]时的决策 k 的取值范围为[s[i,j-1],s[i+1,j]]，于是：

f[1,L+1]的决策数=s[2,L+1]-s[1,L]

f[2,L+2]的决策数=s[3,L+2]-s[2,L+1]

f[3,L+3]的决策数=s[4,L+3]-s[3,L+2]

… …

f[i-1,L+i-1]的决策数=s[i,L+i-1]-s[i-1,L+i-2]

f[i,L+i]的决策数=s[i+1,L+i]-s[i,L+i-1]

f[i+1,L+i+1]的决策数=s[i+2,L+i+1]-s[i+1,L+i]

… …

f[n-L-1,n-1]的决策数=s[n-L,n-1]-s[n-L-1,n-2]

f[n-L,n]的决策数=s[n-L+1,n]-s[n-L,n-1]

因此，对于所有形如 f[I,I+L]的状态，它们的决策次数总和为：

s[n-L+1,n]-s[1,L]<s[n-L+1,n]≤n

证毕！

【推论 2】

如果决策 s[i,j]关于 i 和 j 单调不降，则例 1 可在 $O(n^2)$的时间复杂下解决。

证明：

由推论 1，枚举 L=1~n-1，推论 2 显然成立。

【定理 1 的证明】

对于任意满足 a≤b≤c≤d 的正整数 a,b,c,d,如果 w[a,c]+w[b,d]≤w[a,d]+w[b,c]，则 f[a,c]+f[b,d]≤f[a,d]+f[b,c]

证明：

1．如果 a=b，则 f[a,c]+f[b,d]=f[b,c]+f[a,d],结论成立。

2．如果 c=d，则 f[a,c]+f[b,d]=f[a,d]+f[b,c],结论成立。

3．如果 a<b=c<d 时，等价于证明 f[a,b]+f[b,d]≤f[a,d]

（1）当 d-a=2 时

f[a,a+1]= f[a,a]+f[a+1,a+1]+w[a,a+1]=w[a,a+1]

f[a+1,a+2]= f[a+1,a+1]+f[a+2,a+2]+w[a+1,a+2]=w[a+1,a+2]

f[a,b]+f[b,d]=f[a,a+1]+f[a+1,a+2]=w[a,a+1]+w[a+1,a+2]

f[a,d]=f[a,a+2]

=Min{(f[a,a]+f[a+1,a+2]), (f[a,a+1]+f[a+2,a+2]) }+w[a,a+2]

=Min{f[a+1,a+2],f[a,a+1]}+w[a,a+2]

=Min{(w[a+1,a+2]+w[a,a+2]),(w[a,a+1]+w[a,a+2])}

∵w[a,a+1]< w[a,a+2]且 w[a+1,a+2] <w[a,a+2]

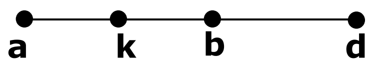
∴f[a,b]+f[b,d]<f[a,d]

即当 d-a=2 时，结论成立。

（2）假设当 2≤d-a≤L-1(L≥3)时，对于任意满足 a<b=c<d 的整数 a,b,c,d,f[a,b]+f[b,d]≤f[a,d]成立

则当 d-a=L 时,令 f[a,d]=f[a,k-1]+f[k,d]+w[a,d]（a<k≤d）

① 当 k≤b 时



f[a,b]+f[b,d]=f[a,b]+f[b,d]

$\le f[a,k-1]+f[k,b]+f[b,d]+w[a,b]$(f[a,b]的状态定义)

$\because d-k<d-a=L$

$\therefore d-k\le L-1$

根据归纳假设，$f[k,b]+f[b,d]\le f[k,d]$

于是，$f[a,c]+f[b,d]\le f[a,k-1]+f[k,d]+w[a,b]$

$<f[a,k-1]+f[k,d]+w[a,d]=f[a,d]$

② 当 $k>b$ 时

$f[a,b]+f[b,d]\le f[a,b]+f[b,k-1]+f[k,d]+w[b,d]$(f[b,d]的状态定义)

$\le f[a,k-1]+f[k,d]+w[b,d]$($k-1-a<d-a$,应用归纳假设)

$< f[a,k-1]+f[k,d]+w[a,d]=f[a,d]$

由①②知，对于任意满足 $a<b=c<d$ 的整数 a,b,c,d, 如果 $d-a\le L-1(L\ge 3)$ 时， $f[a,c]+f[b,d]\le f[a,d]+f[b,c]$成立，则当 $d-a=L$ 时，$f[a,c]+f[b,d]\le f[a,d]+f[b,c]$成立。

由（1）和（2）知，对于任意满足 $a<b=c<d$ 的正整数 a,b,c,d, $f[a,c]+f[b,d]\le f[a,d]+f[b,c]$

4．如果 $a<b<c<d$,我们还是以数学归纳法证明 $f[a,c]+f[b,d]\le f[a,d]+f[b,c]$

（1）如果 $d-a=3$ 时，等价于证明 $f[a,a+2]+f[a+1,a+3] \le f[a,a+3]+f[a+1,a+2]$

① 当 $f[a,a+3]=f[a,a]+f[a+1,a+3]+w[a,a+3]=f[a+1,a+3]+w[a,a+3]$时

$f[a,a+2]+f[a+1,a+3]\le f[a,a]+f[a+1,a+2]+w[a,a+2]+f[a+1,a+3]$（定义）

$= f[a+1,a+2]+w[a,a+2]+f[a+1,a+3]< f[a+1,a+2]+w[a,a+3] +f[a+1,a+3]$

$=f[a,a+3]+f[a+1,a+2]$

② 当 $f[a,a+3]=f[a,a+1]+f[a+2,a+3]+w[a,a+3]$时

$f[a,a+2]\le f[a,a+1]+f[a+2,a+2]+w[a,a+2]=f[a,a+1]+w[a,a+2]$

$f[a+1,a+3]\le f[a+1,a+1]+f[a+2,a+3]+w[a+1,a+3]=f[a+2,a+3]+w[a+1,a+3]$

$f[a,a+2]+f[a+1,a+3]\le f[a,a+1]+ f[a+2,a+3]+w[a,a+2]+w[a+1,a+3]$

$= f[a,a+1]+ f[a+2,a+3]+w[a,a+3]+w[a+1,a+2]$

$= f[a,a+1]+ f[a+2,a+3]+w[a,a+3]+f[a+1,a+2]$

$=f[a,a+3]+f[a+1,a+2]$

③ 当 $f[a,a+3]=f[a,a+2]+f[a+3,a+3]+w[a,a+3]=f[a,a+2]+w[a,a+3]$时

$f[a,a+2]+f[a+1,a+3]\le f[a,a+2]+f[a+1,a+2]+f[a+3,a+3]+w[a+1,a+3]$

$= f[a,a+2]+f[a+1,a+2]+w[a+1,a+3]< f[a,a+2]+w[a,a+3]+f[a+1,a+2]$

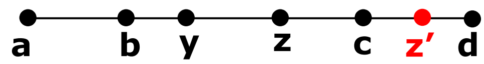
$=f[a,a+3]+f[a+1,a+2]$

由①、②、③知，当 $d-a=3$ 时，$f[a,c]+f[b,d]\le f[a,d]+f[b,c]$成立。

（2）假设当 $3\le d-a\le L-1(L\ge 4)$时，$f[a,c]+f[b,d]\le f[a,d]+f[b,c]$成立,我们来证明对于 $d-a=L$, $f[a,c]+f[b,d]\le f[a,d]+f[b,c]$也是成立的。

令 $f[b,c]=f[b,y-1]+f[y,c]+w[b,c]$

$f[a,d]=f[a,z-1]+f[z,d]+w[a,d]$



① 当 $z=y$ 时

$f[a,c]+f[b,d]\le f[a,y-1]+f[y,c]+w[a,c]$

$+f[b,y-1]+f[y,d]+w[b,d]$

$=f[a,y-1]+f[y,d]+f[b,y-1]+f[y,c]+w[a,c]+w[b,d]$

$\le f[a,y-1]+f[y,d]+f[b,y-1]+f[y,c]+w[a,d]+w[b,c]$(w 函数满足四边形不等式)

$=f[a,d]+f[b,c]$

② 当 $z<y$ 时

$f[a,c]+f[b,d]\le f[a,z-1]+f[z,c]+w[a,c]+f[b,y-1]+f[y,d]+w[b,d]$

$\le f[a,z-1]+f[b,y-1]+f[z,c]+f[y,d]+w[a,d]+w[b,c]$(w 函数满足四边形不等式)

$\le f[a,z-1]+f[b,y-1]+f[z,d]+f[y,c]+w[a,d]+w[b,c]$($d-z\le L-1$,应用归纳假设)

$=f[a,d]+f[b,c]$

③当 $z>y$ 时

$f[a,c]+f[b,d]\le f[a,y-1]+f[y,c]+w[a,c]+f[b,z-1]+f[z,d]+w[b,d]$

$\le f[a,y-1]+f[b,z-1]+f[y,c]+f[z,d]+w[a,d]+w[b,c]$(w 函数满足四边形不等式)

$\le f[a,y-1]+f[b,z-1]+f[y,d]+f[z,c]+w[a,d]+w[b,c]$($d-y\le L-1$,应用归纳假设)

$=f[a,d]+f[b,c]$

由①、②、③知，当 $d-a=L$ 时，$f[a,c]+f[b,d]\le f[a,d]+f[b,c]$成立。

由（1）、（2）知，对于所有满足 $a<b<c<d$ 的正整数 a,b,c,d，$f[a,c]+f[b,d]\le f[a,d]+f[b,c]$。

由以上 1、2、3、4 知,对于所有满足 $a\le b\le c\le d$ 的正整数 a,b,c,d,$f[a,c]+f[b,d]\le f[a,d]+f[b,c]$

定理 1 证毕！

【定理 2】

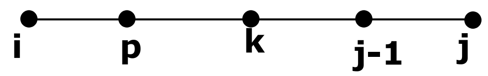
对于任意满足 $a\le b\le c\le d$ 的正整数 a,b,c,d,如果 f 函数满足四边形不等式，即 $f[a,c]+f[b,d]\le f[a,d]+f[b,c]$，则决策 $s[I,j]$关于 I 和 j 均单调不降，即 $s[I,j-1]\le s[I,j]\le s[I+1,j]$

证明:

1．先证明 $s[I,j-1]\le s[I,j]$

为叙述方便，令 $k=s[I,j-1]$,$p=s[I,j]$,则须证明 $p\ge k$

我们使用反证法来证明这一点。假设 $p<k$



求 $f[I,j-1]$时决策 k 不会比决策 p 差，即:

$f[I,k-1]+f[k,j-1]\le f[I,p-1]+f[p,j-1]$----①

求 $f[I,j]$时决策 p 必优于决策 k，即:

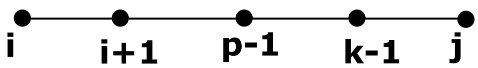
$f[I,p-1]+f[p,j]<f[I,k-1]+f[k,j]$---- ②

①+②得: $f[p,j]+f[k,j-1]<f[p,j-1]+f[k,j]$ ---- ③

$\because p<k\le j-1<j$

如右图，式③与 f 函数满足四边形不等式相矛盾。因此，$p\ge k$，即 $s[I,j-1]\le s[I,j]$。

2．接着证明 $s[I,j]\le s[I+1,j]$



令 $k=s[I,j]$,$p=s[I+1,j]$($I+1<p\le j$)

则须证明 $p\ge k$。假设 $p<k$,

求 $f[I,j]$时决策 k 不会比决策 p 差，即:

$f[I,k-1]+f[k,j]\le f[I,p-1]+f[p,j]$----①

求 $f[I+1,j]$时决策 p 必优于决策 k，即:

$f[I+1,p-1]+f[p,j]<f[I+1,k-1]+f[k,j]$---- ②

①+②得: $f[I,k-1]+ f[I+1,p-1]< f[I,p-1]+f[I+1,k-1]$ ---- ③

$\because i<i+1\le p<k$

$\therefore$式③与 f 函数满足四边形不等式矛盾。

于是得证 $s[I,j]\le s[I+1,j]$。

定理 2 证毕！

【例 2 邮局】(IOI`2000)

按照递增顺序给出一条直线上坐标互不相同的 n 个村庄，要求从中选择 p 个村庄建立邮局，每个村庄使用离它最近的那个邮局，使得所有村庄到各自所使用的邮局的距离总和最小。

试编程计算最小距离和，以及邮局建立方案。

【初步分析】

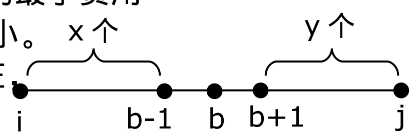
1．以 d[i]表示第 i 个村庄的坐标

以 sum[i]表示前 i 个村庄以第 i 个村庄为邮局时的费用

以 w[i,j]表示第 i 个村庄至第 j 个村庄中建立一个邮局时的最小费用

当邮局建在第 i 个至第 j 个中间的村庄位置时，费用最小。

如右图，假设当前邮局建在第 b 个村庄,左边有 x 个村庄，右边有 y 个村庄。



（1）如果 x<y-1，把邮局由 b 移至 b+1 时，有 y 个费用减少 dis[b-1,b],有 x+1 个村庄费用增加 dis[b-1,b]，总费用减小。因此，取得最小费用时，x>=y-1，即 x-y>=-1。

（2）如果 x>y+1，把邮局由 b 移至 b-1 时，有 x 个费用减少 dis[b-1,b],有 y+1 个村庄费用增加 dis[b-1,b]，总费用减小。因此，取得最小费用时，x<=y+1，即 x-y<=1。

实际上，取得费用时，应该将邮局建在第(i+j)div 2 或第(i+j+1)div 2 个村庄均可。

以 f[i,j]表示在前 j 个村庄中建立 i 个邮局时的最小费用

所求为 f[p,n]

2．状态转移方程

$$f[i,j] = \underset{i-1 \le k \le j-1}{Min}\{f[i-1,k]+w[k+1,j]\}$$

状态 O(np)，每个状态转移时的决策 O(n)，时间复杂度为 $O(pn^2)$。

【算法的优化】

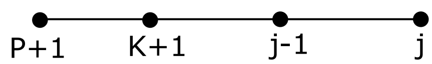
可以以 O(n)的总时间计算出所有 sum 数组的值，利用 sum 数组，求每个 w[i,j]时，只要 O(1)时间。如果求所有 np 个状态的决策数合计为 np 个，或者说每个状态均摊为 O(1)，则时间复杂度可以降为 O(pn)。

一．求状态 f[i,j]的最优决策中的最大者记为 s[i,j]，与例 1 相似，如果最优决策 s 关于 i 和 j 单调不降，则每个状态的决策数均摊为 O(1)。

1．证明 s[i,j-1]≤s[i,j]

为叙述方便，令 k=s[i,j-1],p=s[i,j]。显然 k≤j-2，即 k+1≤j-1

假设 p<k，根据定义，有:



f[i-1,k]+w[k+1,j-1]≤f[i-1,p]+w[p+1,j-1]

f[i-1,p]+w[p+1,j]<f[i-1,k]+w[k+1,j]

两式相加得：w[k+1,j-1]+w[p+1,j]<w[p+1,j-1]+w[k+1,j]

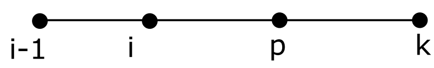
∵p+1<k+1≤j-1<j,如果 w 函数满足四边形不等式,就会出现矛盾。

即只要证明 w 函数满足四边形不等式，即可证得 s[i,j-1]≤s[i,j]

2．证明 s[i,j]≤s[i+1,j]

为叙述方便，令 k=s[i,j],p=s[i+1,j]。显然 i≤p

假设 p<k，根据定义，有:



f[i-1,k]+w[k+1,j]≤f[i-1,p]+w[p+1,j]

f[i,p]+w[p+1,j]<f[i,k]+w[k+1,j]

两式相加得：f[i-1,k]+f[i,p]<f[i-1,p]+f[i,k]

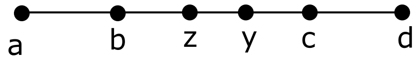
∵i-1<i≤p<k,如果 f 函数满足四边形不等式,就会出现矛盾。

即只要证明 f 函数满足四边形不等式，即可证得 s[i,j]≤s[i+1,j]

二．证明 w 函数满足四边形不等式。

令 a≤b≤c≤d,y=(b+c)div 2,z=(a+d)div 2

1.如果 z<=y，如右图



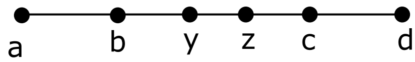
$$w[a,c]+w[b,d]\le\sum_{i=a}^{c}\left|d[i]-d[z]\right|+\sum_{i=b}^{d}\left|d[i]-d[y]\right|$$

$$=\sum_{i=a}^{c}\left|d[i]-d[z]\right|+\sum_{i=b}^{c}\left|d[i]-d[y]\right|+\sum_{i=c+1}^{d}\left|d[i]-d[y]\right|$$

$$\le\sum_{i=a}^{c}\left|d[i]-d[z]\right|+\sum_{i=b}^{c}\left|d[i]-d[y]\right|+\sum_{i=c+1}^{d}\left|d[i]-d[z]\right|$$

$$=\sum_{i=a}^{d}\left|d[i]-d[z]\right|+\sum_{i=b}^{c}\left|d[i]-d[y]\right|$$

$$=w[a,d]+w[b,c]$$



2.如果 z>y，如右图

$$w[a,c]+w[b,d]\le\sum_{i=a}^{c}\left|d[i]-d[y]\right|+\sum_{i=b}^{d}\left|d[i]-d[z]\right|$$

$$=\sum_{i=a}^{b-1}\left|d[i]-d[y]\right|+\sum_{i=b}^{c}\left|d[i]-d[y]\right|+\sum_{i=b}^{d}\left|d[i]-d[z]\right|$$

$$\le\sum_{i=a}^{b-1}\left|d[i]-d[z]\right|+\sum_{i=b}^{c}\left|d[i]-d[y]\right|+\sum_{i=b}^{d}\left|d[i]-d[z]\right|$$

$$=\sum_{i=b}^{c}\left|d[i]-d[y]\right|+\sum_{i=a}^{d}\left|d[i]-d[z]\right|$$

$$=w[b,c]+w[a,d]$$

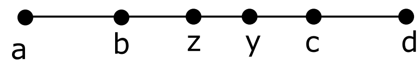
证毕！

三．证明 f 函数满足四边形不等式

令 a≤b≤c≤d

f[a,d]=f[a-1,z]+w[z+1,d](a-1≤z≤d-1)

f[b,c]=f[b-1,y]+w[y+1,c](b-1≤y≤c-1)



1.当 z≤y 时, 有 a-1≤z≤c-1 和 b-1≤y≤d-1

f[a,c]+f[b,d]≤f[a-1,z]+w[z+1,c]+f[b-1,y]+w[y+1,d]

=(f[a-1,z]+f[b-1,y])+w[z+1,c]+w[y+1,d]

∵z+1≤y+1≤c≤d，且 w 函数满足四边形不等式

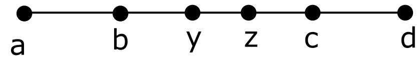
∴w[z+1,c]+w[y+1,d]≤w[z+1,d]+w[y+z,c]

f[a,c]+f[b,d]≤f[a-1,z]+f[b-1,y]+w[z+1,d]+w[y+1,c]=f[a,d]+f[b,c]

2.当 z>y 时, 有 b-1<z≤d-1 和 b-1≤y≤c-1

f[a,c]+f[b,d]≤f[a-1,y]+w[y+1,c]+f[b-1,z]+w[z+1,d]

=(f[a-1,y]+f[b-1,z])+w[y+1,c]+w[z+1,d]



∵a-1≤b-1≤y<z，且 z-a<d-a，可以使用归纳假设得到

f[a-1,y]+f[b-1,z]≤f[a-1,z]+f[b-1,y]
∴f[a,c]+f[b,d]≤f[a-1,z]+f[b-1,y]+w[z+1,d]+w[y+1,c]=f[a,d]+f[b,c]

证毕！

【例 3 最优二叉搜索树】

有用 n 个元素，每个元素的序号为 1 至 n，且每个元素序号各不相同。使用这些元素，以元素序号为比较关键码，可以构成 $C_{2n}^{n}/(n+1)$ 种不同的二叉搜索树。对于给定的二叉搜索树 T 中的某个结点 t，定义访问结点 t 的费用 C_t 为连接根结点和结点 t 的唯一路径上所包含的边数。当然，访问根结点的费用为 0。再给定 n 个常量 g1,g2,…,gn，二叉搜索树 T 的总权值定义为：

$$sum_T = \sum_{i=1}^{n} (g_i C_i)$$

我们把总权值最小的一个二叉搜索树称作“最优二叉搜索树”。给定 n,g1,g2,…,gn，求最优二叉搜索树的总权值。

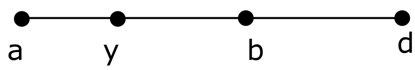
【分析】

以 w[I,j]表示第 I 个至第 j 个元素所有 g 值之和。显然 w 函数满足四边形不等式。
以 f[I,j]表示第 I 个至第 j 个元素构成的最优二叉搜索树的最小总权值。
所求为 f[1,n]。

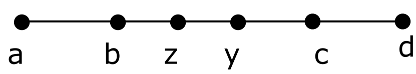
$$f[i,j] = \underset{i \le k \le j}{Min}\{f[i,k-1] + f[k+1,j] + w[i,k-1] + w[k+1,j]\}$$

f[i+1,i]=0,f[i,i]=0

一．证明 f 函数满足四边形不等式



对于 a≤b≤c≤d
1．如果 a=b 或 c=d，则 f[a,c]+f[b,d]=f[a,d]+f[b,c]，满足四边形不等式
2．如果 a<b=c<d，不等式转化为三角不等式 f[a,b]+f[b,d]≤f[a,d]
令 f[a,d]=f[a,y-1]+f[y+1,d]+w[a,y-1]+w[y+1,d]
此时 a≤y≤d
(1)当 y≤b 时, a≤y≤b
f[a,b]+f[b,d]≤f[a,y-1]+f[y+1,b]+w[a,y-1]+w[y+1,b]+f[b,d]
= f[a,y-1] +w[a,y-1]+w[y+1,b]+(f[y+1,b] +f[b,d])
如果 y+1>=b，则 f[y+1,b]+f[b,d]=f[b,d]
容易使用数学归纳法，通过对区间长度进行归纳证明，可以证得：f[b,d]≤f[a,d]
如果 y+1<b，根据 f 函数的三角不等式的归纳假设，
f[y+1,b]+f[b,d]≤f[y+1,d]
因此 f[a,b]+f[b,d]≤f[a,y-1] +w[a,y-1]+w[y+1,b]+f[y+1,d]
≤f[a,y-1]+f[y+1,d]+w[a,y-1]+w[y+1,d]
=f[a,d]



（2）当 y>b 时，类似地可以证得。
3．如果 a<b<c<d
令 f[a,d]=f[a,z-1]+f[z+1,d]+w[a,z-1]+w[z+1,d]
f[b,c]=f[b,y-1]+f[y+1,c]+w[b,y-1]+w[y+1,c]
此时 b≤y≤c
（1）当 z≤y 时
f[a,c]+f[b,d]≤f[a,z-1]+f[z+1,c]+w[a,z-1]+w[z+1,c]

$+f[b,y-1]+f[y+1,d]+w[b,y-1]+w[y+1,d]$

如果 $y+1>=c$,则 $f[z+1,c]+f[y+1,d]\le f[z+1,c]+f[c,d]$(w 函数区间包含的单调性)

$\le f[z+1,d]$(f 函数三角形不等式)

$=f[z+1,d]+f[y+1,c]$（后一项为 0）

$w[z+1,c]+w[y+1,d]= w[z+1,d]+w[y+1,c]$

如果 $y+1<c$ 时，如果 $z+1=y+1$:

$f[z+1,c]+ f[y+1,d] \le f[z+1,d]+f[y+1,c]$

和 $w[z+1,c]+w[y+1,d]\le w[z+1,d]+ w[y+1,c]$显然成立。

如果 $z+1<y+1$，则 $y+1<z+1<c<d$，

根据 f 函数的归纳假设，$f[z+1,c]+ f[y+1,d] \le f[z+1,d]+f[y+1,c]$

根据 w 函数的四边形不等式, $w[z+1,c]+w[y+1,d]\le w[z+1,d]+ w[y+1,c]$

于是 $f[a,c]+f[b,d]\le f[a,d]+f[b,d]$

（2）当 $z>y$ 时，也可类似地证得。

二．证明决策的单调性

1. $s[I,j-1]\le s[I,j]$

令 $k= s[I,j-1],p=s[I,j]$,此时 $i\le k\le j-1$

假设 $p<k$，则:

$f[I,k-1]+f[k+1,j-1]+w[I,k-1]+w[k+1,j-1]$

$\le f[I,p-1]+f[p+1,j-1]+w[I,p-1]+w[p+1,j-1]$

$f[I,p-1]+f[p+1,j]+w[I,p-1]+w[p+1,j]$

$\le f[I,k-1]+f[k+1,j]+w[I,k-1]+w[k+1,j]$

相加得:

$f[k+1,j-1]+ f[p+1,j]+ w[k+1,j-1]+ w[p+1,j]$

$<f[p+1,j-1]+ f[k+1,j]+ w[p+1,j-1]+ w[k+1,j]$

如果 $k=j-1$，上式成为

$f[p+1,j]+ w[p+1,j]< f[p+1,j-1] +w[p+1,j-1]+w[j,j]$

即: $f[p+1,j] < f[p+1,j-1]$，与 f 函数区间包含的单调性矛盾。

如果 $k<j-1$,则 $k+1<=j-1$,此时满足 $p+1<k+1<=j-1<=j$，根据 f 和 w 的四边形不等式:

$f[p+1,j-1]+ f[k+1,j]<= f[k+1,j-1]+ f[p+1,j]$

且 $w[p+1,j-1]+ w[k+1,j]<= w[k+1,j-1]+ w[p+1,j]$,矛盾

2．相似地，可以证明 $s[I,j]\le s[I+1,j]$

总之，求 f[I,j]的动态规划问题，对于每个状态加一维的决策不能过的数据，可以大胆地尝试使用决策的单调性试试看。