

构造法

—— 解题的最短路径

构造法——解题的“最短路径”

- 构造法及其特点
- 常用的构造法
- 构造法的优、缺点

Back

构造法及其特点

➤ 什么叫构造法：

直接列举出满足条件的对象或反例，导致结论的肯定与否定，间接构造某种对应关系，使问题根据需要进行转化的方法。

➤ 构造法绝不是简单的尝试，也不是一时的运气

➤ 构造法使用的前提：存在性

➤ 构造法特别适用于竞赛中求单个可行解的题目

Back

常用的构造法

- 直接构造
- 分类构造
- 归纳构造

Back

构造法的优、缺点

- 优点：

时空复杂度小，编程复杂度小

- 缺点：

思维复杂度大

Back

直接构造

- 一种直接对目标对象进行考察的构造方法。
- 探索是直接构造的灵魂，在构造的背后，往往隐蔽着反反复复的尝试。
- 实际应用中，首先对于目标对象进行观察，发现一般性的规律，加以概括总结后运用至构造中。
- 在熟悉的事物中寻找，在特殊的事物中寻找，接合目标，不断地调整甚至改变方案，直至实现构造

例一：三臂起重机（1）

给出了三个数 p 、 q 、 n ，要构造若干个三元组，符合以下四个要求：

- （1）三元组必须具备形式 $(i, i+p, i+p+q)$ $(i, i+q, i+p+q)$ 之一。
- （2）所有三元组中的元素不得超过 $n+p+q$ 。
- （3） $1, 2, \dots, n+p+q$ 这 $n+p+q$ 个数每个至多出现一次。
- （4）这些三元组必须涵盖 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个自然数。

$$n \leq 300000, \quad p+q \leq 60000。$$

例一：三臂起重机（2）

很自然想到构造法。观察以下几个例子：

$$p=1, q=1$$

$$(1, 2, 3)$$

$$(4, 5, 6)$$

$$(7, 8, 9)$$

.....

$$p=2, q=4$$

$$(1, 3, 7)$$

$$(2, 4, 8)$$

$$(5, 9, 11)$$

)

$$(6, 10, 1$$

2)

$$p=3, q=1$$

$$(1, 4, 5)$$

$$(2, 3, 6)$$

$$(7, 10, 11$$

)

.....

$$p=1, q=3$$

$$(1, 2, 5)$$

$$(3, 4, 7)$$

$$(6, 9, 10)$$

$$(8, 11, 12$$

)

.....

容易得出下面类似贪心的方法：

➤ 设已经构造了 s 个三元组 (x_1, y_1, z_1) 、 (x_2, y_2, z_2) 、 \dots 、 (x_s, y_s, z_s) ，满足 $x_1 < x_2 < \dots < x_s$ 。

➤ 取上面 s 个三元组中没有出现过的最小自然数 r

$$1. r+p \text{ 没有出现过} \rightarrow (x_{s+1}, y_{s+1}, z_{s+1}) = (r, r+p, r+p+q)$$

$$2. r+p \text{ 出现过} \rightarrow (x_{s+1}, y_{s+1}, z_{s+1}) = (r, r+q, r+p+q)$$

例一：三臂起重机（3）

这个方法马上被下面的例子推翻：

$p=3, q=2$

(1, 4, 6)	? 处无
(2, 5, 7)	论填 5
(3, ?, 8)	还是 6
	均已出
	现过

但是如果换一种填法：

$p=2, q=3$

(1, 3, 6)	交换一 下 p 、 q 的位 置，再 应用上 面的填 法
(2, 4, 7)	
(5, 8, 10)	
)	
(9, 11, 14)	

启发我们，应用上述填法的条件是： $p \leq q$ ，即当 $p > q$ 时，先交换 p 、 q 的位置。这仅仅是一个猜想，需要经过实践以及证明。

经过许多尝试，这种构造法仍然满足要求。因此，我们猜测本题完整的构造方法如下：

例一：三臂起重机（4）

- 若 $p > q$ ，则交换 p 、 q 的值，不影响构造的结果。
 - 设已经构造了 s 个三元组 (x_1, y_1, z_1) 、 (x_2, y_2, z_2) 、
…… (x_s, y_s, z_s) ，满足 $x_1 < x_2 < \dots < x_s$ 。
 - 取上面 s 个三元组中没有出现过的最小自然数 r
 1. $r+p$ 没有出现过 $\rightarrow (x_{s+1}, y_{s+1}, z_{s+1}) = (r, r+p, r+p+q)$
 2. $r+p$ 出现过 $\rightarrow (x_{s+1}, y_{s+1}, z_{s+1}) = (r, r+q, r+p+q)$
- ✓ 从题面上看来， p 、 q 的位置应当是对称的，为什么会需要假设“ $p \leq q$ ”的情况呢？

例一：三臂起重机（5）

证明：若 $r+p$ 出现过，那么 $r+q$ 必定未出现。

反证法，设 $r+p$ 、 $r+q$ 均已出现。

$$1. r+q=x_i+p \quad (1 \leq i \leq s), \quad q \geq p$$

$$\rightarrow r=x_i+p-q \leq x_i,$$

与 r 是“前 s 个三元组中未出现的最小自然数”矛盾

$$2. r+q=x_i+p+q \quad (1 \leq i \leq s), \quad r=x_i+p,$$

$$\rightarrow x_i+p \text{ 未出现,}$$

与“若 $r+p$ 未出现，则优先选择 $r+p$ ”矛盾

例一：小结

构造需要反复尝试

例二：区间染色问题（1）

给出了 n 个区间，已知对于 $[t_0, t_1]$ 的任一点，都至少被一个区间所覆盖，要求对其中若干个区间进行染色，使得仅被一个染色区间覆盖的区域长度不少于 $2/3(t_1 - t_0)$ 。

如：对下面的三个区间进行染色，红色部分为仅被一个染色区间覆盖的区域

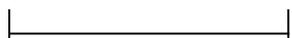


例二：区间染色问题（2）

设这 n 个区间为 $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, \dots , $[a_n, b_n]$, 且 $a_1 \leq a_2 \leq \dots$

去除操作

前提：不存在无解情况



目的：区间之间的关系更简单明了

- $a_1 < a_2 < \dots < a_n$
- $b_1 < b_2 < \dots < b_n$
- $b_1 < a_3 < b_2$, $b_2 < a_4 < b_3$, \dots , $b_{n-2} < a_n < b_{n-1}$

例二：区间染色问题（3）

1) 取 $[a_1, b_1]$ 、 $[a_3, b_3]$ 、 $[a_5, b_5]$ …… 这些编号为奇数的区间。

$$l_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ 为奇数}}}^n b_i - a_i$$

2) 取 $[a_2, b_2]$ 、 $[a_4, b_4]$ 、 $[a_6, b_6]$ …… 这些编号为偶数的区间。

$$l_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ 为偶数}}}^n b_i - a_i$$

3) 取 $[a_1, b_1]$ 、 $[a_2, b_2]$ 、 $[a_3, b_3]$ …… 全部的 n 个区间。

$$l_3 = a_2 - a_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_{i+1} - b_{i-1} + b_n - b_{n-1}$$

例二：区间染色问题（4）

只需证：若 l_1 、 $l_2 < 2/3(t_1 - t_0)$ ，必然有 $l_3 \geq 2/3(t_1 - t_0)$

变形得：

$$l_3 = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i + 2(b_n - a_1)$$

$$l_1 + l_2 = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i, \quad b_n \geq t_1, a_1 \leq t_0$$

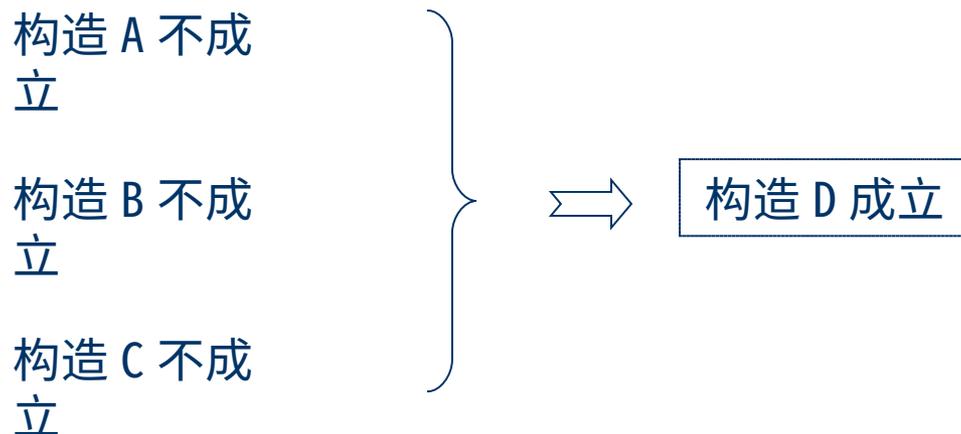
$$\Rightarrow l_3 \geq 2(t_1 - t_0) - (l_1 + l_2) > 2(t_1 - t_0) - 4/3(t_1 - t_0) = 2/3(t_1 - t_0)$$

这就证明了： l_1 、 l_2 、 l_3 中间必然有一个不小于 $2/3(t_1 - t_0)$ ，上述构造成立。

例二：小结

本题采用的方法特别之处在于：同时构造了多组情形，证明必然有一组符合要求。

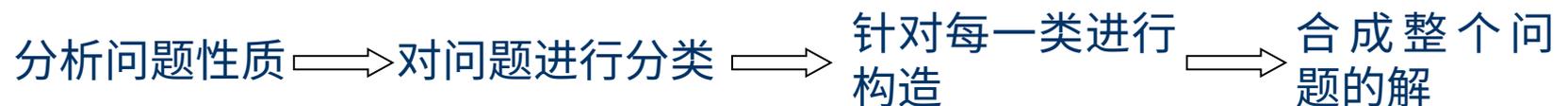
对于某些题目，很难直接给出一种“必行”的构造方法，这时就需要我们为它“量身定做”多个构造方法，相辅相成。某种构造成立——导出结论的成立；不成立——却为其他的构造法创造了条件。



分类构造

当所研究的问题包含有多种可能情况，并难以统一处理时，就需按所有可能出现的各种情况分类进行讨论，得出各种情况的相应结论，最后综合总结出问题的正确解答，这种方法称为分类法。

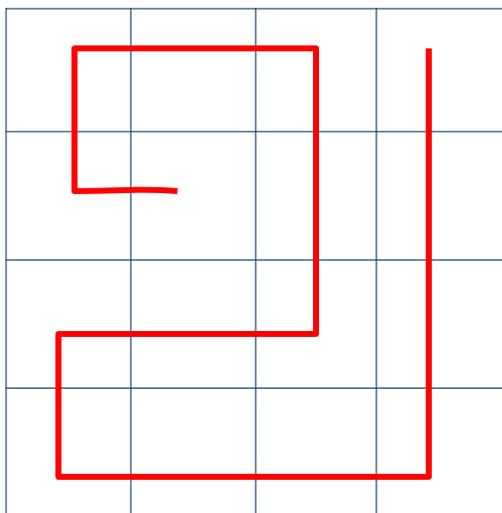
分类构造是分类的思想与构造法相结合的产物，简单说来，就是在分类的基础上进行构造。分类构造的步骤如下：



分类的各种思想在这里同样可以得到很好的应用，如按照剩余系分类（奇偶分类）、按照数据大小分类、按照题目中所涉及到的定义概念分类、按照参数的变化等等。

例三：棋盘遍历问题（1）

有一个 $n \times n$ 的正方形，某人从 (x, y) 出发，要求出一条符合要求的路线，经过每个格子一次且仅一次。

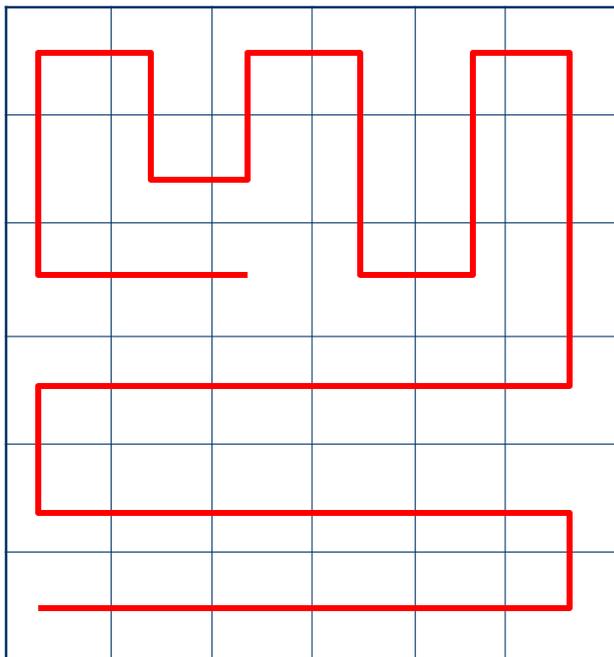


左图是 $n=4$ ， $x=2$ ， $y=2$ 的情况

- ✓ 路线尽可能简单，转弯尽可能少——迂回状折线
- ✓ 特点：在边界处的方向与 n 、 x 、 y 的奇偶性有关

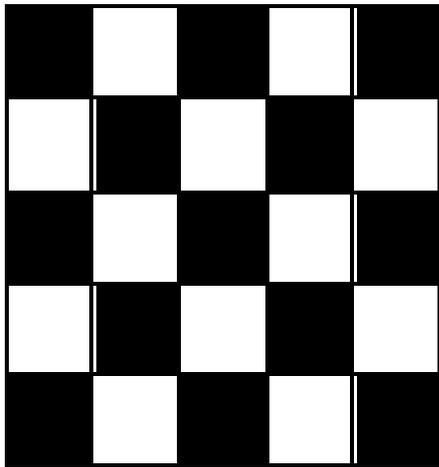
例三：棋盘遍历问题（2）

▶一旦 n 、 x 、 y 的奇偶性确定，路线在边界处的情况就可以唯一确定



▶ n 是偶数，不妨设 x 、 y 均为奇数，否则适当地旋转、翻转棋盘。

例三：棋盘遍历问题（4）



➤ n 为奇数

ii. x 、 y 奇偶性不同，此时问题
无解

先对棋盘进行黑白二染色，如左图

n 为奇数 →

遍历棋盘要走奇数步 → 终止点是黑格

x 为奇数、 y 为偶数 → 出发点是白格

→ 黑格数 = 白格数

n 为奇数 → 黑格数 = 白格数 + 1

→ 矛盾

例三：小结

本题的分类并不是凭空得来的，而是基于“迂回性折线”的特点。这种路线到了边界处会出现不同的情形，需要我们区别对待。

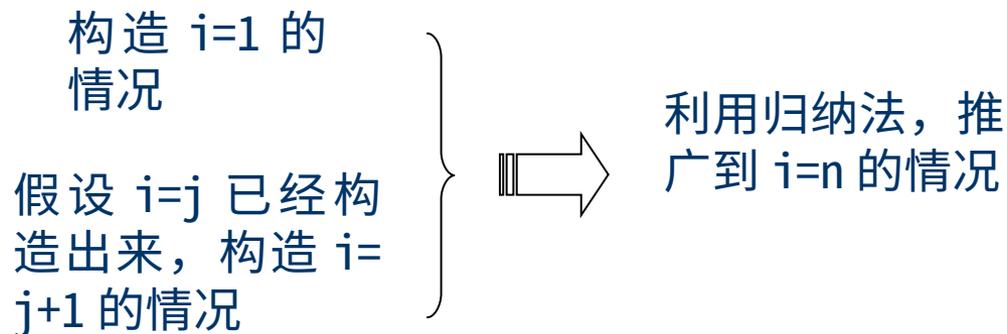
**构造的分类标准
与
选择的构造方法
息息相关。**

Back

归纳构造

这里所说的归纳就是指数学归纳法。数学归纳法一直被人们津津乐道，因为有限的几步，跨越了无限的空间。它被频繁采用并衍生出多种形式：如第二归纳法、多起点归纳法、曲线归纳法等等。

归纳构造利用了归纳的思想，是构造法的一个经典的实现形式。在竞赛中，采用得比较普遍的仍然是一般归纳法 + 构造法的形式。在这里，我们概括出这种方法一般的步骤如下：



例四：赛程安排问题（1）

有 2^m 个选手，每一天安排若干场比赛，且每个选手每天仅可以参加一场比赛，试给出一种赛程的安排表，使得在 2^m-1 天内任意两个选手都至少比赛过一场。

○

分析：将赛程表设计成如下 $2^m \times 2^m$ 的矩阵（除去第一行），记为 P_m 。

	第一天	第二天	第 2^m-1 天	第 2^m 天
选手 1					
选手 2					
.....					
选手 2^m-1					
选手 2^m					

例四：赛程安排问题（2）

容易知道，这个矩阵有以下几个特点：

- 1) 第 i 行第一列的数为 i ，
- 2) 第 i 行的数的并集等于 $\{1, 2, 3, \dots, 2^m\}$
- 3) 第 j 列的数的并集等于 $\{1, 2, 3, \dots, 2^m\}$
- 4) 若第 i 行第 j 列的数字为 k ，那么第 k 行第 j 列的数字为 i 。

采用归纳构造的基本思想是：首先构造出 P_m ，在 P_m 的基础上构造出 P_{m+1}

。

P_{m+1} 是一个 $2^{m+1} \times 2^{m+1}$ 的矩阵，启发我们将它均分成四个 $2^m \times 2^m$ 的矩阵，实现从 P_m 到 P_{m+1} 的过渡。为了适应规模的增大，对于 P_m 中的元素进行适当的加减运算。

例四：赛程安排问题（3）

设 P_m 已经填好，将 P_{m+1} 均分为四份 A、B、C、D。

A	B
C	D

令 $A=D=P_m$ ， $B=C=P_m+2^m$ （表示把 P_m 中的元素都加上 2^m 后形成的新矩阵）。



$P_{m+1} =$

P_m	$P_m + 2^m$
$P_m + 2^m$	P_m

可以验证，这样构造出来的矩阵仍然满足要求 1)、2)、3)、4)。根据这张表可以给出相应的赛程安排。

例四：赛程安排问题（4）

有 2^n 个选手参加比赛。已知两个选手比赛时总是强的一方胜，且不会出现某两个选手一样强的情况。每个选手每天至多同一个对手比赛。试给出一种赛程的安排表，使得在 $n*(n+1)/2$ 天内确定所有选手的强弱。

分析：为了方便起见，用 $A>B$ 表示选手 A 比选手 B 强。

首先尝试一般的归纳构造：

设结论对于 n 成立，考虑 $n+1$ 时，共 2^{n+1} 名选手分为两个组 A、B，每组 2^n 个人，由归纳假设，只需 $n*(n+1)/2$ 天即可确定两个组各自的顺序，假设已经排成： $A_1>A_2>A_3>\dots>A_{2^n}$ ， $B_1>B_2>B_3>\dots>B_{2^n}$ ，那么现在要在 $(n+1)*(n+2)/2-n*(n+1)/2=n+1$ 天内完成两个组的合并。

这一步是整个问题的关键所在，也是问题的瓶颈！

例四：赛程安排问题（5）

问题转化为：

已知 $A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{2^n}$ ， $B_1 > B_2 > B_3 > \dots > B_{2^n}$ ，在 $n+1$ 天之内确定这 2^{n+1} 个人的顺序。

这一步仍然需要采用归纳法来解决。经过许多次尝试，我们发现一般的归纳构造在“分 \rightarrow 合”这一步上都无法胜任。想到数学归纳法的一个常用技巧——**加强命题!**

命题加强为：

$k+l=2^n$ （ k 、 l 、 n 均为正整数），已知 $A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_k$ ， $B_1 > B_2 > B_3 > \dots > B_l$ ，决定这 2^n 名选手强弱只需 n 天。

上述命题仍然可以采用归纳构造来解决。

例四：赛程安排问题（6）

当 $n=1$ 时， $k=l=1$ ，安排 $A_1 \Leftrightarrow B_1$ ，结论显然成立。

假设对于 n 时已经有了安排方法，考虑 $n+1$ 的情况。

不妨设 $k \leq l$ ， $k+l=2^{n+1}$ 。安排第一天的比赛如下：

A_1	A_e	A_k	逐渐弱 \rightarrow
B_2^n	$B_{2^{n-1}}$	$B_{2^{n-k+1}}$	逐渐强 \rightarrow

设 A_j 是编号最小的负于对手的考生，即 A_1 、 A_2 、..... A_{j-1} 都取胜， A_j 、 A_{j+1} 、..... A_k 都负于对手。可以推出结论：

$$A_1 > A_2 > \dots > A_{j-1} > B_{2^{n-j+2}} > B_{2^{n-j+3}} > \dots > B_{2^{n-1}} > B_2^n > \dots > B_l$$

$$B_1 > B_2 > \dots > B_{2^{n-j+1}} > A_j > A_{j+1} > \dots > A_k$$

例四：赛程安排问题（7）

把这 2^n 名选手分为两组：

强组： $A_1 > A_2 > \dots > A_{j-1}$ ， $B_1 > B_2 > \dots > B_{2^{-j+1}}^n$ 共 2^n 名。

弱组： $A_j > A_{j+1} > \dots > A_k$ ， $B_{2^{-j+2}}^n > B_{2^{-j+3}}^n > \dots > B_{2^{-1}}^n > B_2^n > \dots > B_l$ ， 共 2^n 名。

容易看出，强组中的任一人均比弱组中的任一人强。

由归纳假设，两组均只需 n 天（并列进行）就可以确定组内的强弱，又由于强组全体排在弱组前，故整体名次也确定。加上初始时用的一天时间，总共 $n+1$ 天，这 2^{n+1} 名选手名次确定，结论对于 $n+1$ 时也成立。

加强后的结论成立，故之前的结论也成立。回到原来的问题，就很容易解决了。由上述结论推出， $A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{2^n}$ ， $B_1 > B_2 > B_3 > \dots > B_{2^n}$ ，只需 $n+1$ 天就可以合并这两个组。总共需要的天数为 $n^*(n+1)/2 + (n+1) = (n+1)^*(n+2)/2$ ，即 $n+1$ 时也可以完成赛程安排。

例四：小结

上面的两个赛程安排问题都是运用归纳构造的典型。前者很容易就能实现从 $m-1$ 到 m 的过渡，但后者则需要加强命题，并两次使用归纳构造。

加强命题是数学中一种常用的方法，在加强结论的同时，归纳假设的条件也增强了，为解题铺平了道路。

构造中综合运用数学的各种方法