由感性认识到理性认识

——透析一类搏弈游戏的解答过程

一、游戏

- 游戏 A：
- 甲乙两人面对若干堆石子，其中每一堆石子的数目可以任意确定。例如图 1 所示的初始局面：共 n=3 堆，其中第一堆的石子数 $a_1=3$，第二堆石子数 $a_2=3$，第三堆石子数 $a_3=1$。两人轮流按下列规则取走一些石子，游戏的规则如下：
  - 每一步应取走至少一枚石子；
  - 每一步只能从某一堆中取走部分或全部石子；
  - 如果谁无法按规则取子，谁就是输家。

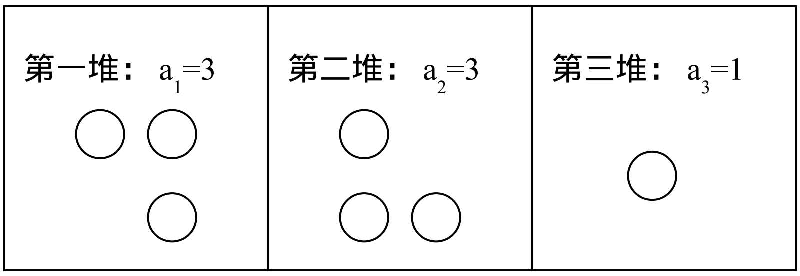


图 1 游戏的一个初始局面

- 游戏 B：
  - 甲乙双方事先约定一个数 m，并且每次取石子的数目不能超过 m 个；
  - 其余规则同游戏 A。

我们关心的是，对于一个初始局面，究竟是先行者（甲）有必胜策略，还是后行者（乙）有必胜策略。

下面，我们从简单入手，先来研究研究这个游戏的一些性质。

二、从简单入手

- **用一个 n 元组(a_1, a_2, …, a_n)，来描述游戏过程中的一个局面。**
  - 可以用 3 元组(3, 3, 1)来描述图 1 所示的局面。
- **改变这个 n 元组中数的顺序，仍然代表同一个局面。**

- (3, 3, 1)和(1, 3, 3)，可以看作是同一个局面。

- 如果初始局面只有一堆石子，则甲有必胜策略。
  - 甲可以一次把这一堆石子全部取完，这样乙就无石子可取了。
- 如果初始局面有两堆石子，而且这两堆石子的数目相等，则乙有必胜策略。
  - 因为有两堆石子，所以甲无法一次取完；
  - 如果甲在一堆中取若干石子，乙便在另一堆中取同样数目的石子；
  - 根据对称性，在甲取了石子之后，乙总有石子可取；
  - 石子总数一直在减少，最后必定是甲无石子可取。
- 对于初始局面(1)，甲有必胜策略，而初始局面(3, 3)，乙有必胜策略。

- **局面的加法：$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m)$。**
  - (3) + (3) + (1) = (3, 3) + (1) = (3, 3, 1)。
- **对于局面 A, B, S，若 S=A+B，则称局面 S 可以分解为“子局面”A 和 B。**
  - 局面(3, 3, 1)可以分解为(3, 3)和(1)。

- 如果初始局面可以分成两个相同的“子局面”，则乙有必胜策略。
  - 设初始局面 S=A+A，想象有两个桌子，每个桌子上放一个 A 局面；
  - 若甲在一个桌子中取石子，则乙在另一个桌子中对称的取石子；
  - 根据对称性，在甲取了石子之后，乙总有石子可取；
  - 石子总数一直在减少，最后必定是甲无石子可取。
- 初始局面(2, 2, 5, 5, 5, 5, 7, 7)，可以分成两个(2, 5, 5, 7)，故乙有必胜策略。

- **对于局面 S，若先行者有必胜策略，则称“S 胜”。**
- **对于局面 S，若后行者有必胜策略，则称“S 负”。**
  - 若 A=(1)，B=(3, 3)，C=(2, 2, 5, 5, 5, 5, 7, 7)，则 A 胜，B 负，C 负。
  - 我们所关心的，就是如何判断局面的胜负。

- **如果局面 S 胜，则必存在取子的方法 S→T，且 T 负。**
- **如果局面 S 负，则对于任意取子方法 S→T，有 T 胜。**

- 设初始局面 S 可以分解成两个子局面 A 和 B（**分解理论**）。
  - **若 A 和 B 一胜一负，则 S 胜。**
    - 不妨设 A 胜 B 负；
    - 想象有两个桌子 A 和 B，桌子上分别放着 A 局面和 B 局面；
    - 因为 A 胜，所以甲可以保证取桌子 A 上的最后一个石子；
    - 与此同时，甲还可以保证在桌子 B 中走第一步的是乙；
    - 因为 B 负，所以甲还可以保证取桌子 B 中的最后一个石子；
    - 综上所述，甲可以保证两个桌子上的最后一个石子都由自己取得。
  - **若 A 负 B 负，则 S 负。**
    - 无论甲先从 A 中取，还是先从 B 中取，都会变成一胜一负的局面；
    - 因此，乙面临的局面总是“胜”局面，故甲面临的 S 是“负”局面。
  - 若 B 负，则 S 的胜负情况与 A 的胜负情况相同。
  - **若 A 胜 B 胜，则有时 S 胜，有时 S 负。**

- 如果 S=A+C+C，则 S 的胜负情况与 A 相同。
  - 令 B=C+C，则 S=A+B 且 B 负，故 S 的胜负情况与 A 相同。
- 图 1 所示的初始局面(3, 3, 1) = (3) + (3) + (1)，与局面(1)的胜负情况相同。
- 图 1 中所示的初始局面(3, 3, 1)是“胜”局面，甲有必胜策略。

- 称一个石子也没有的局面为“空局面”。
- 空局面是“负”局面。

- 如果局面 S 中，存在两堆石子，它们的数目相等。用 T 表示从 S 中把这两堆石子拿掉之后的局面，则称“S 可以简化为 T”。
  - 局面(2, 2, 2, 7, 9, 9)可以简化为(2, 2, 2, 7)，还可以进一步简化为(2, 7)。

- 一个局面的胜负情况，与其简化后的局面相同。
  - 三个局面(2, 2, 2, 7, 9, 9)、(2, 2, 2, 7)和(2, 7)，胜负情况都相同。

- 不能简化的局面称为“最简局面”。
  - 局面 (2, 7)是最简局面。

✍ 最简局面中不会有两堆相同的石子，故可以用一个集合来表示最简局面。
  - 最简局面(2, 7)可以用集合{2, 7}来表示。

✉ **如果只关心局面的胜负，则一个局面可以用一个集合来描述。**
  - 图 1 所示的局面(3, 3, 1)，可以用集合{1}来描述。

如果用搜索（搏弈树）的方法来解这个游戏，则采用集合来表示一个局面，比采用多元组来表示一个局面，搜索量将有所减少，但时间复杂度仍然很高。

能不能进一步简化一个局面的表示呢？

三、类比与联想

- 二进制加法[1]
  - $1 + 0 = 1$；
  - $0 + 1 = 1$；
  - $0 + 0 = 0$；
  - $1 + 1 = 0$。

- 二进制的加法 VS 局面的加法
  - 大写字母 AB 表示局面，小写字母 ab 表示二进制
  - 若 A 和 B 相同，则 A+B 负；若 a 和 b 相等，则 a+b=0
  - 若 A 胜 B 负，则 A+B 胜；若 a=1 且 b=0，则 a+b=1
  - 若 B 胜 A 负，则 A+B 胜；若 b=1 且 a=0，则 a+b=1
  - 若 A 负 B 负，则 A+B 负；若 a=0 且 b=0，则 a+b=0
  - ……

[1] 本文的“二进制加法”，是指不进位的二进制加法，也可以理解为逻辑里的“异或”操作。

- 如果用二进制 1 和 0，分别表示一个局面的胜或负
- 局面的加法，与二进制的加法有很多类似之处。
  - ✘ 若 A 胜 B 胜，则 A+B 有时胜，有时负；若 a=1 且 b=1，则 a+b=0。

- **二进制数的加法：对二进制数的每一位，都采用二进制的加法。**
  - ， 。

0011	1010
+	+
1010	1010
1001	0000

- 二进制数的加法 VS 局面的加法
  - 大写字母 AB 表示局面，小写字母 ab 表示二进制数
  - 若 A 和 B 相同，则 A+B 负；若 a 和 b 相等，则 a+b 为 0
  - 若 A 胜 B 负，则 A+B 胜；若 a≠0 且 b=0，则 a+b≠0
  - 若 B 胜 A 负，则 A+B 胜；若 b≠0 且 a=0，则 a+b≠0
  - 若 A 负 B 负，则 A+B 负；若 a=0 且 b=0，则 a+b=0
  - 若 A 胜 B 胜，则 A+B 有时胜，有时负
  - 若 a≠0 且 b≠0，则有时 a+b≠0，有时 a+b=0
  - ……

- 如果用二进制数 s 来表示一个局面 S 的胜或负，S 胜则 s≠0，S 负则 s=0
- 局面的加法，与二进制数的加法，性质完全相同。
- **能否用一个二进制数，来表示一个局面呢？**
- **用符号#S，表示局面 S 所对应的二进制数。**

- 如果局面 S 只有一堆石子，则用这一堆石子数目所对应的二进制数来表示 S。
  - #(5)=5=101。

- **若局面 S=A+B，则#S=#A+#B。**

- 局面(3, 3)=(3)+(3)，所以#(3, 3)=#(3)+#(3)=11+11=0。
- 局面(3, 3, 1)=(3, 3)+(1)，所以#(3, 3, 1)=#(3, 3)+#(1)=0+1=1。

函数 f：若局面 S 只有一堆石子，设 S={a_1}，则 f(a_1)=#S，即 f(a_1)=#(a_1)。

- 对于游戏 A 来说，#(5)=101，所以 f(5)=101。
- 对于游戏 A 来说，f(x)就是 x 所对应的二进制数。换句话说，f(x)=x。

设局面 S=(a_1, a_2, …, a_n)，即 S=(a_1)+(a_2)+…+(a_n)，则#S=f(a_1)+f(a_2)+…+f(a_n)。

- #(3, 3, 1)=#((3)+(3)+(1))=#(3)+#(3)+#(1)=f(3)+f(3)+f(1)=11+11+1=1。

对于局面 S，若#S=0，则 S 负；若#S≠0，则 S 胜。

四、证明

二进制数 a, b，若 a + b = 0，当且仅当 a = b。

1011	1011
+	+
1011	1001

二进制数 a, b, s，若 a + b = s，则 a = b + s。

0011	1001
+	+
1010	1010

二进制数 $a_1+a_2+\ldots+a_n=p\neq 0$，则必存在 k，使得 $a_k+p<a_k$。

- 因为 p≠0，所以 p 的最高位是 1；
- 设 p 的最高位是第 q 位；

- 至少存在一个 k，使得 a_k 的第 q 位也是 1；
- a_k+p 的第 q 位为 0，所以 $a_k+p<a_k$。

11001 a_1
01101 a_k
+ 10010 a_3
00110 p
q

01101 a_k
+ 00110 p
01011 a_k+p
q

✍ **若#S=0，则无论先行者如何取子 S→T，都有#T≠0。**

- 先行者只能从某一堆中取若干石子，不妨设他选择的就是第 1 堆；
- 设先行者从第 1 堆中取了 x 个石子，用 T 表示取完之后的局面；
- 设 $S=(a_1, a_2, \dots, a_n)$，则 $T=(a_1-x, a_2, \dots, a_n)$；
- $\#S=f(a_1)+\#(a_2, \dots, a_n)=0$，故 $f(a_1)=\#(a_2, \dots, a_n)$；
- $\#T=f(a_1-x)+\#(a_2, \dots, a_n)=f(a_1-x)+f(a_1)$；
- $x>0 \to f(a_1)\neq f(a_1-x) \to f(a_1)+f(a_1-x)\neq 0 \to \#T\neq 0$。

00101 a_1
10011 a_2
10111 a_3
+ 00001 a_4
00000 p=0

00101 a_1
00101 $a_2+a_3+a_4=a_1$
+ 00000 p=0

$x\neq a_1$
a_1
+
$p\neq 0$

✍ **若#S≠0，则先行者必然存在一种取子方法 S→T，且#T=0。**

- 设 $S=(a_1, a_2, \dots, a_n)$，$p=\#S=f(a_1)+f(a_2)+\dots+f(a_n)$；
- 因为 $p\neq 0$，所以必然存在 k，使得 $f(a_k)+p<f(a_k)$，不妨设 $k=1$，$f(a_1)+p=x$；
- 先行者将第 1 堆的石子的数目从 a_1 变成 x，用 T 表示这个局面；

$p=\#S=f(a_1)+\#(a_2, \ldots, a_n)$，故$\#(a_2, \ldots, a_n)=f(a_1)+p=x$；

$\#T=f(x)+\#(a_2, \ldots, a_n)=f(x)+x=0$。

00101 00101 a_1 x

a_1

10011 00011 x

a_2 $x=a_2+a_3+a_4=a_1+p<a_1$ + p=0

00111 +

a_3 00110 p

+ 10111 a_4

00110

若 S 是空局面，则#S=0。

p≠0

✉ **若#S=0，则 S 负；若#S≠0，则 S 胜。**

#(1, 2, 3)=01+10+11=0，故局面(1, 2, 3)负。

#(1, 2, 3, 4)=001+010+011+100=100，故局面(1, 2, 3, 4)胜。

对于游戏 A 来说，任意的一个初始局面 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，我们把这里的 a_i 都看成是二进制数。令 $\#S=a_1+a_2+\ldots+a_n$。若#S≠0，则先行者（甲）有必胜策略；否则#S=0，这时后行者（乙）有必胜策略。

下面把这个结论推广到游戏 B。

函数 f：f(x)=x mod (m+1)；把函数 f 的值看作是二进制数。

对于任意初始局面 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，令 $\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$。

✍ 若#S≠0，则先行者（甲）有必胜策略；否则后行者（乙）有必胜策略。

类似游戏 A 的证明。

游戏 B 的解法与游戏 A 十分类似。这是因为两个游戏的规则相当类似。

五、推广

- 游戏 C：
- 甲乙两人面对若干排石子，其中每一排石子的数目可以任意确定。例如图 2 所示的初始局面：共 n=3 排，其中第一排的石子数 a_1=7，第二排石子数 a_2=3，第三排石子数 a_3=3。两人轮流按下列规则取走一些石子，游戏的规则如下：
  - 每一步必须从某一排中取走两枚石子；
  - 这两枚石子必须是紧紧挨着的；
  - 如果谁无法按规则取子，谁就是输家。

第一排，a_1=7
第二排，a_2=3
第三排，a_3=3

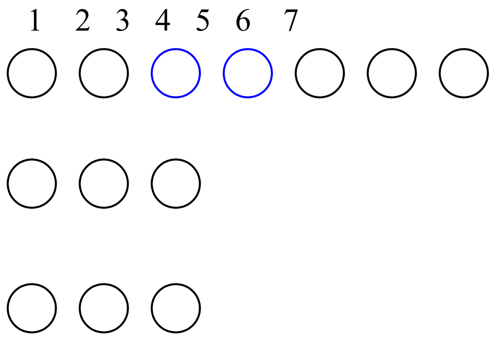


图 2 游戏的一个初始局面

- 如果甲第一步选择取第一排 34 这两枚石子，之后无论是甲还是乙，都不能一次取走 25 这两枚石子。换句话说，如果取了 34 这两枚石子，等价于将第一排分成了两排，这两排分别有 2 个和 3 个石子。

我们只关心，对于一个初始局面，究竟是先行者（甲）有必胜策略，还是后行者（乙）有必胜策略。

游戏 C 的规则和游戏 A 并不那么相似。但是，前面所列出的，游戏 A 的关键性质，游戏 C 却都具有。比如说，图 2 所示的初始局面可以用三元组(7, 3, 3)来表示，它的胜负情况与初始局面(7)相同。

游戏 A 的解答是由它的性质得出来的。因此，我们猜想游戏 C 是否也能用类

似的方法来解。

六、精华

- 回忆游戏 A 的结论，以及它在游戏 B 上的推广，对于游戏 C，我们的想法是
- 设计一个函数 f，把函数 f 的值看作是二进制数。对于任意一个初始局面 S，设 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，令 $\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$。若 $\#S\neq0$，则先行者（甲）有必胜策略；否则 $\#S=0$，这时后行者（乙）有必胜策略。
  - 游戏 A 中，$f(x) = x$。
  - 游戏 B 中，$f(x) = x \bmod (m + 1)$。
  - 游戏 C 中，$f(x) = ?$。

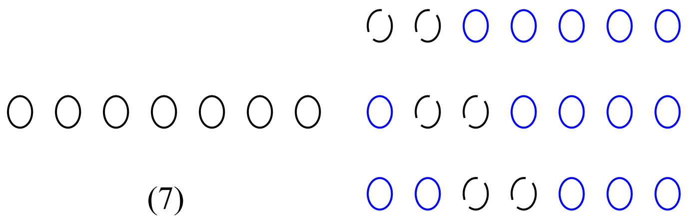
- **关键就在于如何构造一个满足要求的函数 f。**

- 回忆关于游戏 A、B 的结论的证明过程

函数 f 是否满足要求，关键在于#S 是否满足下面的条件。

- **若 $\#S=0$，则无论先行者如何取子 $S\rightarrow T$，都有 $\#T\neq0$。**
- **若 $\#S\neq0$，则先行者必然存在一种取子方法 $S\rightarrow T$，且 $\#T=0$。**

- **用符号$(x)，表示局面(x)的下一步所有可能出现的局面的集合。**
  - 在游戏 A 中，$\$(3)=\{(2), (1), (0)\}$。
  - 在游戏 B 中，若 m=4，则 $\$(9)=\{(8), (7), (6), (5)\}$，$\$(2)=\{(1), (0)\}$。
  - 在游戏 C 中，$\$(7)=\{(5), (1, 4), (2, 3)\}$。
- **定义集合 g(x)：设 $\$(x)=\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$，则 $g(x)=\{\#S_1, \#S_2, \ldots, \#S_k\}$。**
  - 在游戏 A 中，$\$(3)=\{(2), (1), (0)\}$，故 $g(3)=\{\#(2), \#(1), \#(0)\}=\{10, 01, 00\}$。
  - 在游戏 B 中，若 m=4，则 $g(9)=\{\#(8), \#(7), \#(6), \#(5)\}$，$g(2)=\{\#(1), \#(0)\}$。
  - 在游戏 C 中，$g(7)=\{\#(5), \#(1, 4), \#(2, 3)\}$。



(5)

(1, 4)

(7)

(2, 3)

$(7)={(5), (1, 4), (2, 3)}

g(7)={#(5), #(1, 4), #(2, 3)}

- **若#S=0，则无论先行者如何取子 S→T，都有#T≠0。**
  - 设 $S=(a_1, a_2, …, a_n)$，由于先行者只能选择一堆石子，不妨设选择了 a_1；
  - 因为 $\#S=f(a_1)+\#(a_2, …, a_n)=0$，所以 $f(a_1)=\#(a_2, …, a_n)$；
  - 先行者可能将局面 (a_1) 变为局面 $(b_1, …, b_m)$，$\#(b_1, …, b_m)$ 属于集合 $g(a_1)$；
  - 设这时的局面为 T，我们有 $T=(b_1, …, b_m)+(a_2, …, a_n)$；
  - $\#T=\#(b_1, …, b_m)+\#(a_2, …, a_n)=\#(b_1, …, b_m)+f(a_1)$；
  - 如果要求 $\#T\neq0$，则必然有 $\#(b_1, …, b_m)\neq f(a_1)$；
  - **因此，函数 $f(a_1)$ 的值，不属于集合 $g(a_1)$。（充要）**

00101 $f(a_1)$

10011 $f(a_2)$

10111 $f(a_3)$

\+ 00001 $f(a_4)$

00000

p=0

00101 $f(a_1)$

\+ 00101 $f(a_1)$

00000 p=0

$\#(b_1, b_2, …, b_m)\in g(a_1)$

\+ $f(a_1)$

p≠0

- **若#S≠0，则先行者必然存在一种取子方法 S→T，且#T=0。**

- 设 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，$p=\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$；
- 因为 $p\neq0$，所以必然存在 k，使得 $f(a_k)+p<f(a_k)$，不妨设 $k=1$，$f(a_1)+p=x$；
- 因为 $p=\#S=f(a_1)+\#(a_2, \ldots, a_n)$，故 $(a_2, \ldots, a_n)=p+f(a_1)=x$；
- 如果先行者把局面 (a_1) 变为局面 $(b_1, \ldots, b_m)$，$\#(b_1, \ldots, b_m)$ 属于集合 $g(a_1)$；
- 设这时的局面为 T，我们有 $T=(b_1, \ldots, b_m)+(a_2, \ldots, a_n)$；
- $\#T=\#(b_1, \ldots, b_m)+\#(a_2, \ldots, a_n)=\#(b_1, \ldots, b_m)+x$；
- 如果要使 $\#T=0$，相当于要找到 $(b_1, \ldots, b_m)$，使得 $\#(b_1, \ldots, b_m)$ 等于 x；
- 如果可以保证 x 属于集合 $g(a_1)$，则肯定可以找到相应的的 $(b_1, \ldots, b_m)$；
- 因为 $x<f(a_1)$，所以，x 属于集合 $\{0, 1, \ldots, f(a_1)-1\}$；
- **如果集合 $g(a_1)$ 包含集合 $\{0, 1, \ldots, f(a_1)-1\}$，则 x 一定属于 $g(a_1)$。（充分）**

00101　　00101　$f(a_1)$　　$\#(b_1, b_2, \ldots, b_m)=x$

$f(a_1)$

10011　　00011　　x　如果 $x\in g(a_1)$

$f(a_2)$　　$x=f(a_1)+p<f(a_1)$　　+

00111　+　　p=0

$f(a_3)$　　00110　p

+　10111　$f(a_4)$

- **函数 f 满足要求的一个充分条件**
  - p≠0
  - **$f(a_1)$ 不属于集合 $g(a_1)$。**
  - **集合 $g(a_1)$ 包含集合 $\{0, 1, \ldots, f(a_1)-1\}$。**
- **如果 $g(a_1)=\{0, 1, 2, 5, 7, 8, 9\}$，则 $f(a_1)=3$，满足要求。**

- 用大写字母 N 表示非负整数集，即 $N=\{0, 1, 2, \ldots\}$。
- 令 N 为全集，集合 $G(x)$ 表示集合 $g(x)$ 的补集。

- **定义函数 f(n)：f(n)=min{G(n)}，即 f(n)等于集合 G(n)中的最小数。**
- **设局面 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，$\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$，采用二进制数的加法。**
- **若#S=0，则 S 负；若#S≠0，则 S 胜。**

- 游戏 C 的 f 值：
  - g(0)={}，G(0)={0, 1, …}，f(0)=0；
  - g(1)={}，G(1)={0, 1, …}，f(1)=0；
  - g(2)={#(0)}={f(0)}={0}，G(2)={1, 2, …}，f(2)=1；
  - g(3)={#(1)}={f(1)}={0}，G(2)={1, 2, …}，f(3)=1；
  - g(4)={#(2), #(1, 1)}={f(2), f(1)+f(1)}={1, 0}，G(4)={2, 3, …}，f(4)=2；
  - g(5)={#(3), #(1, 2)}={f(3), f(1)+f(2)}={1, 1}，G(5)={0, 2, 3, …}，f(5)=0；
  - g(6)={#(4), #(1, 4), #(2, 2)}={2, 1, 0}，G(6)={3, 4, …}，f(6)=3；
  - g(7)={#(4), #(1, 4), #(2, 3)}={2, 2, 0}，G(7)={1, 3, 4, …}，f(7)=1；
- 图 2 所示的局面 S=(7, 3, 3)，有#S=f(7)+f(3)+f(3)=1+1+1=1，故 S 胜。
- 游戏 C 的初始局面 S=(3, 4, 6)，有#S=1+2+3=01+10+11=0，故 S 负。

七、结论

- **此类搏弈游戏的一般性解法：**
  - 用一个 n 元组$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，来描述游戏过程中的一个局面。
  - 用符号#S，表示局面 S 所对应的二进制数。
  - 用符号\$(x)，表示局面(x)的下一步所有可能出现的局面的集合。
  - 定义集合 g(x)：设\$(x)=$\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$，则 g(x)=$\{\#S_1, \#S_2, \ldots, \#S_k\}$。
  - 令非负整数集为全集，集合 G(x)表示集合 g(x)的补集。
  - 定义函数 f(n)：f(n)=min{G(n)}，即 f(n)等于集合 G(n)中的最小数。
  - 设局面 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，$\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$，采用二进制数的加法。
- **若#S≠0，则先行者有必胜策略；若#S=0，则后行者有必胜策略。**

- **适用范围和限制条件：**

- 甲乙两人取石子游戏及其类似的游戏；
- 每一步只能对某一堆石子进行操作；
- 每一步操作的限制，只与这堆石子的数目或一些常数有关；
- 操作在有限步内终止，并不会出现循环；
- 谁无法继续操作，谁就是输家。

游戏 D（POI'2000，Stripes）：

一排石子有 L 个，甲乙两人轮流从中取"紧紧挨着的"A 或 B 或 C 枚石子。谁不能取了，谁就是输家。已知 A, B, C, L，问甲乙二人谁有必胜策略。

☺ 有了前面的结论，这个游戏就难不倒我们了。

八、总结

1. 从算法优化的角度

取石子游戏属于一类典型的搏弈游戏。穷举所有的局面，理论上可以求得最优策略。但穷举的时空复杂度太高，本文所提出的解法，有效的控制了算法的时空复杂度，可以看作是对穷举法的一个优化。

优化算法的过程，可以看作是在优化局面的表示。首先，我们用一个 n 元组表示一个局面，这是很直观很容易想到的。因为我们只关心局面的胜负，于是得到了第一个性质：这个 n 元组是无序的。进一步分析发现，n 元组中如果出现两个相同的数字，则把它们消去，不影响局面的胜负。于是，我们改用集合来表示一个局面。最后，通过与二进制数的对比，又简化到用一个数来表示一个局面。

优化局面的表示，使得搜索量大大减少。那么，减少的搜索量都到哪里去了呢？举个例子，对于游戏 A 中的 5 个局面：(3, 3, 1), (1, 3, 3), (5, 5, 1), (2, 3)：

a. 采用 n 元组：这 5 个局面互不相同；

b. 采用无序 n 元组：局面(3, 3, 1)和(1, 3, 3)相同；

c. 采用集合：局面(3, 3, 1), (1, 3, 3), (5, 5, 1)都相同，可以用集合{1}表示；

d. 采用二进制数：4 个局面所对应的二进制数都是 1，故都相同。

算法的优化，本质上是**避免穷举相同的局面**，即避免重复搜索。而优化的关键，就在于“**相同局面**”的定义。

“相同局面”的定义，必须能够反映游戏的性质。我们没有简单的按照局面的胜负，来对局面归类，就是这个原因。

2. 从算法构造的角度

人们认识事物的过程中，开始只是看到了各个事物的现象。这就是认识的感性阶段。在这个阶段中，还不能作出合乎逻辑的结论。随着研究的深入，这些感觉和印象的东西反复了多次，于是在人们的脑子里生起了一个认识过程中的突变，最后产生出合乎逻辑的结论。这就是认识的理性阶段。

人们认识事物的过程，就是由感性认识上升到理性认识的过程。具体到解这类游戏，就是要**从简单入手**。当我们遇到了一个复杂的问题，或许人人都知道从简单入手，但却并不是每个人都能从中得到一般性的规律。那么，我们究竟是如何**由浅入深**的呢？

两堆数目相等的石子——这是个很简单的局面。我们就由此入手，将一堆石子与一个子局面相类比，并得出了两个子局面相等时的结论。在此基础上，我们研究了局面的胜负和其子局面的关系，并得出结论：可以用集合来描述一个局面。但我们并没有停留在这一步，而是将局面的分解与二进制数的加法相类比，从而发现了局面与二进制数之间的关系。我们称这个过程为“**由此及彼**”。

通过分析“用集合来表示一个局面”的结论，我发现这实质上是简化了局面的表示，从而联想到能否进一步化简，比如说用一个数来表示。在解游戏 C 时，我们并不在意它与游戏 A 的规则有多大的区别，而是注意到它与游戏 A 有着相似的性质，从而想到用类似的方法解游戏 C。我们称这个过程为“**由表及里**”。

在解游戏 A 和 B 的过程中，我们积累了很多经验。但在解游戏 C 时，我们却仅仅提到了解游戏 A 和 B 的精华：构造一个函数 f。这就是“**去粗取精**”。

将局面与二进制数相类比，我们先试着把局面的胜负直接与二进制的 1 和 0 相类比。发现不妥后，再将其改为与二进制数来类比。这一步叫“**去伪存真**”。

“由此及彼、由表及里、去粗取精、去伪存真”，这就是由感性认识上升到理性认识的关键。

由感性认识到理性认识

——透析一类搏弈游戏的解答过程

认识事物的过程

事物的现象 ——?——> 事物的本质

认识的感性阶段　　　　认识的理性阶段

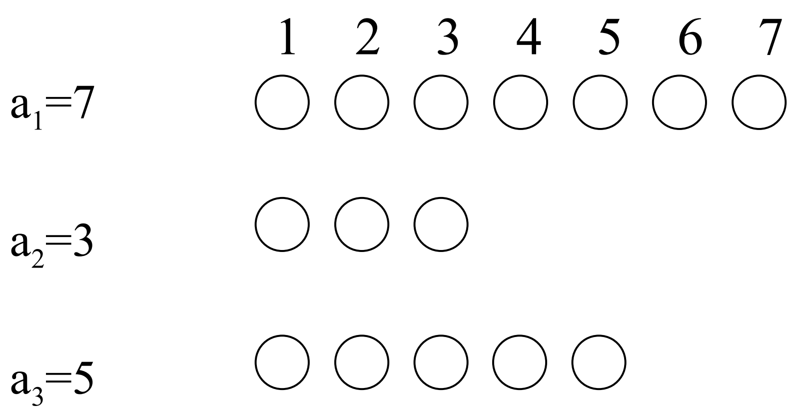
人们认识事物，总是**从简单入手**。

并不是人人都能从简单的事物中得到**一般性的规律**。

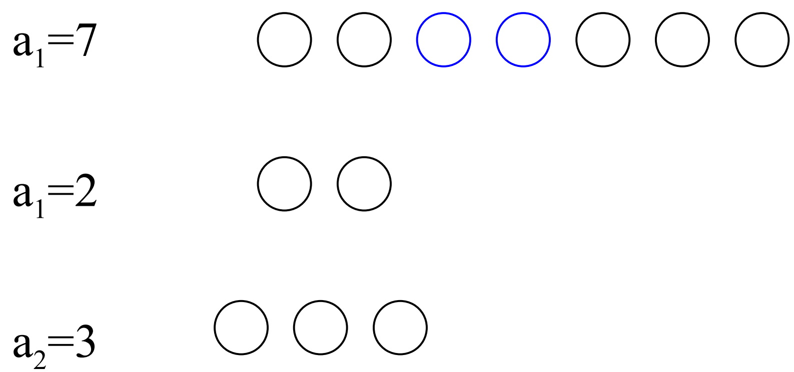
究竟如何才能**由浅入深**呢？

游戏

- 甲乙两人面对若干排石子。
- 每一排石子的数目可以任意确定。
- 两人轮流按下列规则取走一些石子：
  - 每一步必须从某一排中取走两枚石子；
  - 这两枚石子必须是**紧紧挨着**的；
  - 如果谁无法按规则取子，谁就是输家。



规则分析

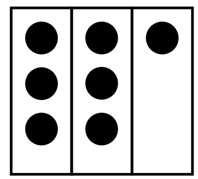


- 如果一排有 7 枚石子
- 而你取了 3 、 4 这两枚石子，
- 可以看作是将这一排分成了两排，
- 其中一排有 2 枚石子，另一排有 3 枚石子。

局面的排数可能会随着游戏的进行而增加。

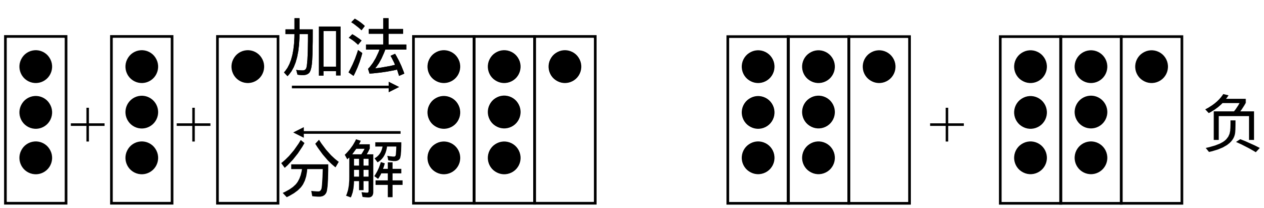
从简单入手

- 用一个无序多元组 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，来描述游戏过程中的一个局面。



(3, 3, 1)

- 若先行者有必胜策略，则称为“胜局面”。
- 若后行者有必胜策略，则称为“负局面”。
- 若初始局面可以分成两个相同的“子局面”，则乙有必胜策略。



(3)+(3)+(1)　　(3, 3, 1)　　(3, 3, 3, 3, 1, 1)

局面的分解

X + X = 负

胜 + 负 = 胜

负 + 负 = 负

胜 + 胜 = ?

X + 负 = X

X + C+C = X

局面与集合

- 我们只关心局面的胜负。
- 一个局面可以用一个集合来描述。
- 这实质上是简化了局面的表示。
- 能不能进一步简化一个局面的表示呢？

X + C+C = X

$(2, 2, 2, 7, 9, 9) = (2, 2, 2, 7) + (9)+(9) \longrightarrow (2, 2, 2, 7)$

用集合 $\{2, 7\}$ 来表示 $\longleftarrow$ $(2, 7)$

类比

- 局面的加法
  - 胜 + 负 = 胜；
  - 负 + 胜 = 胜；
  - 负 + 负 = 负；
  - 胜 + 胜 = 不定。

- 二进制的 01 加法 VS 局面的加法
  - ✓ 1 + 0 = 1 ；胜 + 负 = 胜；
  - ✓ 0 + 1 = 1 ；负 + 胜 = 胜；
  - ✓ 0 + 0 = 0 ；负 + 负 = 负；
  - ✗ 1 + 1 = 0 ；胜 + 胜 = 不定。

- 二进制数的不进位加法：对二进制数的每一位，采用 01 加法。

$$\begin{array}{r} 0011 \\ +\quad 1010 \\ \hline 1001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1010 \\ +\quad 1010 \\ \hline 0000 \end{array}$$

- 二进制数的加法 VS 局面的加法

胜+负=胜　!0+0=!0

负+负=负　0+0=0

胜+胜=?　!0+!0=?

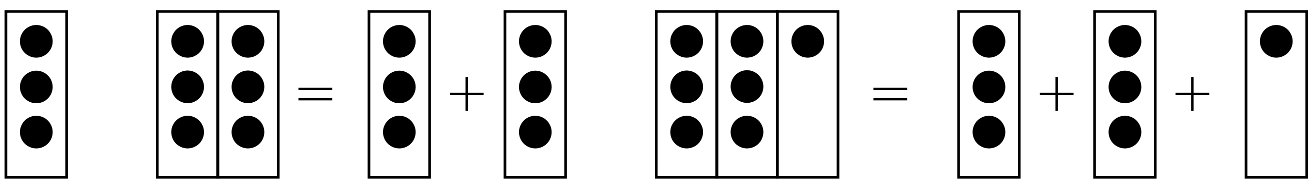
胜⇔ !0， 负⇔ 0

✍局面的加法，与二进制数的加法，性质完全相同。

联想

- 能否用一个二进制数，来表示一个局面呢？
- 用符号 #S ，表示局面 S 所对应的二进制数，简称局面 S 的值。
- #S=0⇔S 负，   #S≠0⇔S 胜。
- $\#S=\#(a_1, \ldots, a_n)=f(a_1)+\ldots+f(a_n)$ 。
- **关键就在于函数 f(x) 的构造。**

S



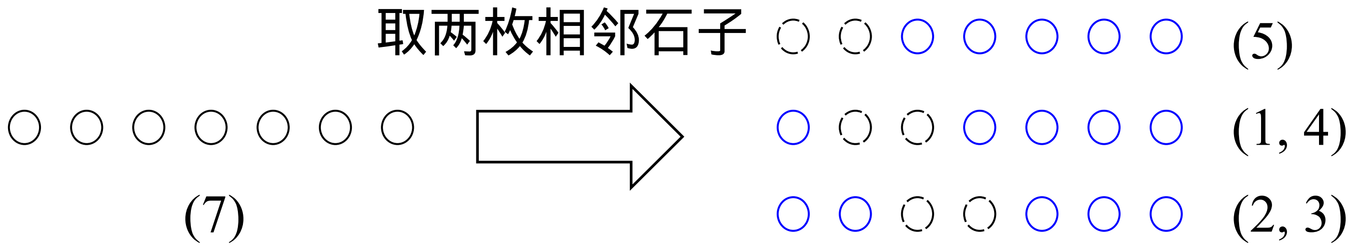
(3)   (3, 3) = (3) + (3)   (3, 3, 1) = (3) + (3) + (1)

#S #(3)   #(3, 3)=#(3)+#(3)   #(3, 3, 1)=#(3)+#(3)+#(1)

#(3, 3, 1)=f(3)+f(3)+f(1)

构造

- 集合 g(x)：表示局面 (x)，下一步可能局面的值的集合。

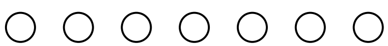


g(7)={#(5), #(1, 4), #(2, 3)}

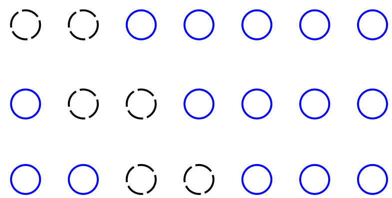
- 可以证明，令函数 f(x) 为 g(x) 中没有出现的最小非负整数，满足要求。
- 如果 g(x)={0, 1, 2, 5, 7, 8, 9}，则 f(x)=3 。
- 令 G(x) 为 g(x) 在非负整数集下的补集。
- **令 f(x)=min{G(x)}，满足要求。**

例子

x	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	0	0	1	1	2	0	3	?



(7)



(5) $\#(5)=f(5)=0$

(1, 4) $\#(1,4)=f(1)+f(4)=0+2=2$

(2, 3) $\#(2,3)=f(2)+f(3)=1+1=0$

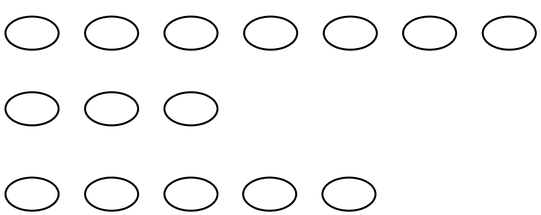
$g(7)=\{0,2\}$， $G(7)=\{1,3,4,5,$

$f(7)=\min\{G(7)\}=\min\{1,3,4,5,\ldots\}=1$

$a_1=7$

$a_2=3$

$a_3=5$



$\#(7,3,5)=f(7)+f(3)+f(5)=1+1+0=0$

局面 (7, 3, 5) 是负局面

后走者（乙）有必胜策略

推广

- 把游戏规则改变一下
  - 一次取紧紧相邻的两枚石子；
  - 一次取紧紧相邻的三枚石子；
  - 一次取紧紧相邻的任意多枚石子；
  - 一次取某一排中的任意两枚石子，不要求紧紧相邻；
  - 一次取某一排中的任意多枚石子，不要求紧紧相邻；
- 此类博弈游戏的特点
  - 甲乙两人取石子；
  - 每一步只能对某一排石子进行操作；
  - 每一步操作的约束，只与这排石子的数目或一些常数有关；
  - 操作在有限步内终止，并不会出现循环；
  - 谁无法继续操作，谁就是输家。

此类博弈游戏的一般性解法

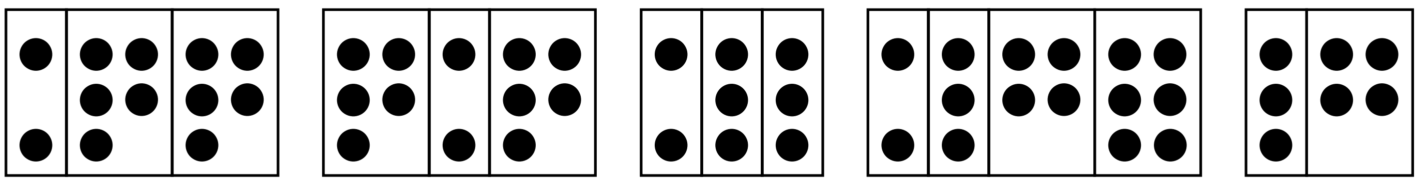
- 判断一个局面，究竟谁有必胜策略
  - 设局面 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$；
  - S 的值 $\#S=f(a_1)+\ldots+f(a_n)$（二进制数的加法）；
  - 如果 $\#S\neq0$，则先行者有必胜策略；
  - 如果 $\#S=0$，则后行者有必胜策略。
- 函数 $f(x)$ 的求法
  - $f(0)=0$；
  - $g(x)$ 表示局面 (x)，下一步可能局面的值的集合；
  - 令 $G(x)$ 为 $g(x)$ 在非负整数集下的补集；
  - 则 $f(x)=\min\{G(x)\}$。

小结（一）优点 & 缺点

- 优点
  - 适用范围广，可以直接用于大多数此类游戏
  - 与穷举相比，速度快，时空复杂度低
- 缺点
  - 另一个游戏
    - 有若干堆石子，两人互取。无法取子者输。
    - 一次只能在一堆中取，至少一枚，至多不限。
    - 对于这个游戏，可以证明令 $f(x)=x$ ，就满足要求。
  - 有些游戏可以直接推导出函数 $f(x)$ 的表达式

小结（二）如何优化算法

- 可以看作是对搜索算法的优化。
- 优化算法的过程，可以看作是对局面的表示进行了简化。
- 本质：避免了对相同局面的穷举，即避免重复搜索。



无序组：	(2, 5, 5)	(5, 2, 5)	(2, 3, 3)	(2, 3, 4, 6)	(3, 4)
集合：	{2}	{2}	{2}	{2, 3, 4, 6}	{3, 4}
二进制数：	01	01	01	01	11

小结（三）如何由浅入深

从简单入手

$X+X=$ 负

由此及彼

胜 + 负 = 胜

负 + 负 = 负

胜 + 胜 = 不定

去粗取精

$X+C+C=X$

去粗取精

采用集合表示局面

由浅入深

由此及彼

~~采用 0 和 1 表示胜负~~

去伪存真

进一步简化

由表及里

本质：简化局面的表示

采用二进制数表示局面

$F(x)=\min\{G(x)\}$

由感性认识到理性认识的途径

- 去伪存真
- 去粗取精
- 由此及彼
- 由表及里

总结

- 此类游戏的一般性解法
  - $F(x)=\min\{G(x)\}$
- 算法优化的本质
  - 避免重复搜索
- 如何由浅入深
  - 去伪存真，去粗取精
  - 由此及彼，由表及里