

动态规划加速原理之四边形不等式

华中师大一附中 赵爽

一、四边形不等式基本理论

在动态规划问题中，有一个常见的状态转移方程：

$$m(i, j) = \begin{cases} \min_{i < k \leq j} \{m(i, k-1) + m(k, j) + w(i, j)\}, & i < j \\ 0, & i = j \\ \infty, & i > j \end{cases} \quad (1.1)$$

例如“最小代价子母树”问题，都用到了这个式子。假如对于 $i \leq i' < j \leq j'$ ，有 $w(i', j) \leq w(i, j')$ ，那么我们称函数 w 满足关于区间包含的单调性。另外，假如有：

$$w(i, j) + w(i', j') \leq w(i', j) + w(i, j') \quad (1.2)$$

那么我们称函数 w 满足四边形不等式。

例如在“最小代价子母树”问题中，有 $w(i, j) + w(i', j') = w(i', j) + w(i, j')$ 。因此该问题

中函数 w 是满足四边形不等式的。

左图是四边形不等式的一种形象化理解。上面的不等式在图中可以看作在四边形 ABCD 中，对角线 AC 两个端点的权值之和，不大于对角线 BD 两个端点的权值之和。

我们下面要研究的问题，是在 w 既满足关于区间包含的单调性，又满足四边形不等式的前提下进行的。

【定理 1】假如函数 w 满足上述条件，那么函数 m 也满足四边形不等式，即

$$m(i, j) + m(i', j') \leq m(i', j) + m(i, j'), \quad i \leq i' < j \leq j'$$

证明：

当 $i = i'$ 或 $j = j'$ 时，显然有

$$m(i, j) + m(i', j') = m(i', j) + m(i, j'), \quad \text{不等式成立。}$$

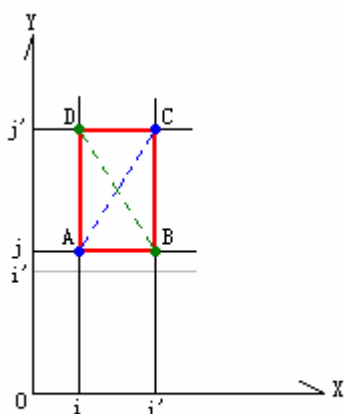


图1

四边形不等式的形象理解

对于不同的问题， $m(i, j)$ 的边界取值可能不同。这对我们讨论的问题没有影响。

下面分两种情况进行归纳证明（对 $l = j' - i$ 进行归纳）：

情形 1 : $i < i' = j < j'$

此时，四边形不等式转化为形如

$m(i, j) + m(j, j') \leq m(j, j) + m(i, j') = m(i, j')$ 的反三角形形式。

设 $k = \max \{t \mid m(i, j') = m(i, t-1) + m(t, j') + w(i, j')\}$ 。

由对称性，不妨假设 $k \leq j$ 。那么，有 $m(i, j') = w(i, j') + m(i, t-1) + m(t, j')$ 。

因此，有：

$$\begin{aligned} m(i, j) + m(j, j') &\leq w(i, j) + m(i, k-1) + m(k, j) + m(j, j') \\ &\leq w(i, j') + m(i, k-1) + m(k, j) + m(j, j') \\ &\leq w(i, j') + m(i, k-1) + m(k, j') \\ &= m(i, j') \end{aligned}$$

情形 2 : $i < i' < j < j'$

$$\text{设} \begin{cases} y = \max \{t \mid m(i', j) = w(i', j) + m(i', t-1) + m(t, j)\} \\ z = \max \{t \mid m(i, j') = w(i, j') + m(i, t-1) + m(t, j')\} \end{cases}$$

由对称性，不妨再假设 $z \leq y$ 。那么，由定义可知 $i < z \leq y \leq j$ 。因此我们有：

$$\begin{aligned} &m(i, j) + m(i', j') \\ &\leq w(i, j) + m(i, z-1) + m(z, j) + w(i', j') + m(i', y-1) + m(y, j') \\ &\leq w(i, j') + w(i', j) + m(i', y-1) + m(i, z-1) + m(z, j) + m(y, j') \\ &\leq w(i, j') + w(i', j) + m(i', y-1) + m(i, z-1) + m(y, j) + m(z, j') \\ &= m(i, j') + m(i', j) \end{aligned}$$

综上所述，由数学归纳法可知，函数 $m(i, j)$ 也满足四边形不等式。证毕。

我们定义 $s(i, j)$ 为函数 $m(i, j)$ 对应的决策变量的最大值，即：

$$s(i, j) = \max_{i < k \leq j} \{m(i, j) = w(i, j) + m(i, k-1) + m(k, j)\} \quad (1.3)$$

【定理 2】 假如 $m(i, j)$ 满足四边形不等式，那么 $s(i, j)$ 单调，即：

$$s(i, j) \leq s(i, j+1) \leq s(i+1, j+1)$$

证明：

由对称性，我们仅需证明 $s(i, j) \leq s(i, j+1)$ 。在 $i > j$ 时， $s(i, j) = s(i, j+1) = \infty$ ，

命题显然成立。 $i = j$ 时， $s(i, j) = 0 \leq s(i, j+1)$ ，命题也成立。下面讨论 $i < j$ 的情况。

为了方便叙述，我们令 $m_k(i, j)$ 表示决策变量取 k 的时候目标函数的值。即 $m_k(i, j) = w(i, j) + m(i, k-1) + m(k, j)$ 。那么有 $m_{s(i,j)}(i, j) = m(i, j)$ 。

由于 $m(i, j)$ 满足四边形不等式，因此对于任意的 $k \leq k' \leq j$ ，有：

$$m(k, j) + m(k', j+1) \leq m(k', j) + m(k, j+1)$$

我们将等式两边同时加上 $w(i, j) + m(i, k-1) + w(i, j+1) + m(i, k'-1)$ ，就可以得出

$$m_k(i, j) + m_{k'}(i, j+1) \leq m_k(i, j+1) + m_{k'}(i, j)，即：$$

$$m_k(i, j) - m_{k'}(i, j) \leq m_k(i, j+1) - m_{k'}(i, j+1) \quad (1.4)$$

通过(1.4)式我们可以发现，

$$m_{k'}(i, j) \leq m_k(i, j) \rightarrow m_{k'}(i, j+1) \leq m_k(i, j+1) \quad (1.5)$$

由于 $k' \geq k$ ，同时对于所有的 $k < s(i, j)$ ，有 $m_{s(i,j)}(i, j) = m(i, j) \leq m_k(i, j)$ 。有(1.5)式的蕴涵关系，我们可知 $m_{s(i,j)}(i, j+1) \leq m_k(i, j+1)$ 。因此 $s(i, j+1) \geq s(i, j)$ ，证毕。

证明了 $m(i, j)$ 取到最优值时的决策变量 $s(i, j)$ 具有单调性之后，我们发觉

$s(i, j-1) \leq s(i, j) \leq s(i+1, j)$ 。因此状态转移方程(1.1)等价于：

$$m(i, j) = \begin{cases} \min_{s(i,j-1) \leq k \leq s(i+1,j)} \{m(i, k-1) + m(k, j) + w(i, j)\}, & i < j \\ 0, & i = j \\ \infty, & i > j \end{cases} \quad (1.6)$$

由于动态规划的阶段是 $l = j - i$ ，因此我们在寻求 $m(i, j)$ 的时候， $s(i, j-1)$ 和 $s(i+1, j)$ 必定已经求出。因此我们可以缩小决策变量 k 的枚举范围，从而减少运算量。

状态转移方程(1.1)的时间复杂度为 $O(n^3)$ ，而(1.6)式的复杂度为

$$\begin{aligned}
& O\left(\sum_{l=2}^n \sum_{i=1}^{n+1-l} (1+s(i+1, i+l-1)-s(i, i+l-2))\right) \\
&= O\left(\sum_{l=2}^n (n+1-l+s(n+2-l, n)-s(1, l-1))\right) \\
&\leq O\left(\sum_{l=2}^n [2n+1-2l]\right) = O[(n-1)^2]
\end{aligned}$$

因此优化后的算法时间复杂度为 $O(n^2)$ 。

二、四边形不等式的应用

事实上，四边形不等式并不仅仅限于(1.1)的形式。有不少与之类似的状态转移方程，也是满足四边形不等式的。

【例】最优二叉搜索树

[问题描述]

用 n 个元素 $e_1 < e_2 < \dots < e_n$ ，可以构成 $\frac{C_{2n}^n}{n+1}$ 种不同的二叉搜索树。对于一个给定的二

叉搜索树 T 中包含值 e_i 的结点 t_i ，我们定义访问该结点的费用 c_i 为连接根结点和该结点的唯一路径所包含的边数。特别的，访问根结点的费用为 0。再给定 n 个常量 f_1, f_2, \dots, f_n ，二叉搜索树 T 的总权值定义为

$$sum_T = \sum_{i=1}^n f_i \cdot c_i$$

我们把总权值最小的一个二叉搜索树称作“最优二叉搜索树”。给定 n, f_1, f_2, \dots, f_n ，求最优二叉树的总权值。

[问题分析]

很明显， $e_1 < e_2 < \dots < e_n$ 这个条件确定了问题的有序性。我们定义

$$w(i, j) = \begin{cases} \sum_{k=i}^j f_k & (i \leq j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

那么，我们可以得到状态转移方程：

$$m(i, j) = \begin{cases} \min_{i \leq k \leq j} \{m(i, k-1) + w(i, k-1) + m(k+1, j) + w(k+1, j)\}, & i < j \\ 0, & i \geq j \end{cases} \quad (2.1)$$

$m(1, n)$ 即为所求。

[问题的优化]

很明显, (2.1)式的时间复杂度为 $O(n^3)$ 。但是注意到(2.1)和(1.1)的形式相当类似, 因此我们试图证明其满足四边形不等式, 从而得出决策变量的单调性, 将该问题的复杂度降到 $O(n^2)$ 。

首先, 不难发现 w 满足区间包含的单调性和四边形不等式。下面我们证明 m 同样满足四边形不等式。

当 $i = i'$ 或 $j = j'$ 时, 不等式显然成立。下面进行归纳证明, 对 $l = j' - i$ 进行归纳:

情形 1: $i < i' = j < j'$:

不等式转化为 $m(i, j) + m(j, j') \leq m(i, j')$ 。

设 $k = \max\{t \mid m(i, t-1) + w(i, t-1) + m(t+1, j) + w(t+1, j)\}$ 。有对称性, 不妨假设

$k \leq j$ 。那么, 有:

$$\begin{aligned} & m(i, j) + m(j, j') \\ & \leq m(i, k-1) + w(i, k-1) + m(k+1, j) + w(k+1, j) + m(j, j') \\ & \leq m(i, k-1) + w(i, k-1) + m(k+1, j') + w(k+1, j') \\ & = m(i, j') \end{aligned}$$

情形 2: $i < i' < j < j'$

$$\text{设} \begin{cases} y = \max\{t \mid m(i', j) = m(i', t-1) + w(i', t-1) + m(t+1, j) + w(t+1, j)\} \\ z = \max\{t \mid m(i, j') = m(i, t-1) + w(i, t-1) + m(t+1, j') + w(t+1, j')\} \end{cases}$$

由对称性, 不妨假设 $z \leq y$ 。那么有: $i \leq z \leq y \leq j$ 。

为了节省篇幅, 这里的证明省略了一些对于边界情况的讨论。

$$\begin{aligned}
& m(i, j) + m(i', j') \\
& \leq m(i, z-1) + w(i, z-1) + m(z+1, j) + w(z+1, j) \\
& \quad + m(i', y-1) + w(i', y-1) + m(y+1, j') + w(y+1, j') \\
& \leq m(i, z-1) + w(i, z-1) + m(z+1, j') + w(z+1, j') \\
& \quad + m(i', y-1) + w(i', y-1) + m(y+1, j) + w(y+1, j) \\
& = m(i, j') + m(i', j)
\end{aligned}$$

综上所述，由数学归纳法，命题得证。

由 m 满足四边形不等式，我们可以证明决策变量 $s(i, j)$ 的单调性。证明过程和(1.1)的证明类似，这里就不再赘述了。

因此，(2.1)在 $i < j$ 时等价于：

$$m(i, j) = \min_{s(i, j-1) \leq k \leq s(i+1, j)} \{m(i, k-1) + w(i, k-1) + m(k+1, j) + w(k+1, j)\}, i < j$$

而这个状态转移方程的时间复杂度仅为 $O(n^2)$ 。