由对称性解2-SAT问题

2-SAT:

- 2-SAT就是2判定性问题，是一种特殊的逻辑判定问题。
- 2-SAT问题有何特殊性？该如何求解？
- 我们从一道例题来认识2-SAT问题，并提出对一类2-SAT问题通用的解法。

Poi 0106 Peaceful Commission [和平委员会]

- 某国有n个党派，每个党派在议会中恰有2个代表。
- 现在要成立和平委员会，该会满足:
- 每个党派在和平委员会中有且只有一个代表
- 如果某两个代表不和，则他们不能都属于委员会
- 代表的编号从1到$2n$，编号为$2a-1$、$2a$的代表属于第a个党派

- 输入*n*（党派数），*m*（不友好对数）及*m*对两两不和的代表编号
- 其中 $1 \le n \le 8000$， $0 \le m \le 20000$
- 求和平委员会是否能创立。
- 若能，求一种构成方式。

例：输入： *3 2*

1 3

2 4

输出： *1*

4

5

分析:

- 原题可描述为:

  有n个组，第i个组里有两个节点A_i, A_i'。需要从每个组中选出一个。而某些点不可以同时选出（称之为不相容）。任务是保证选出的n个点都能两两相容。

  - （在这里把A_i, A_i'的定义稍稍放宽一些，它们同时表示属于同一个组的两个节点。也就是说，如果我们描述A_i，那么描述这个组的另一个节点就可以用A_i'）

初步构图

- 如果A_i与A_j不相容，那么如果选择了A_i，必须选择A_j'；同样，如果选择了A_j，就必须选择A_i'。

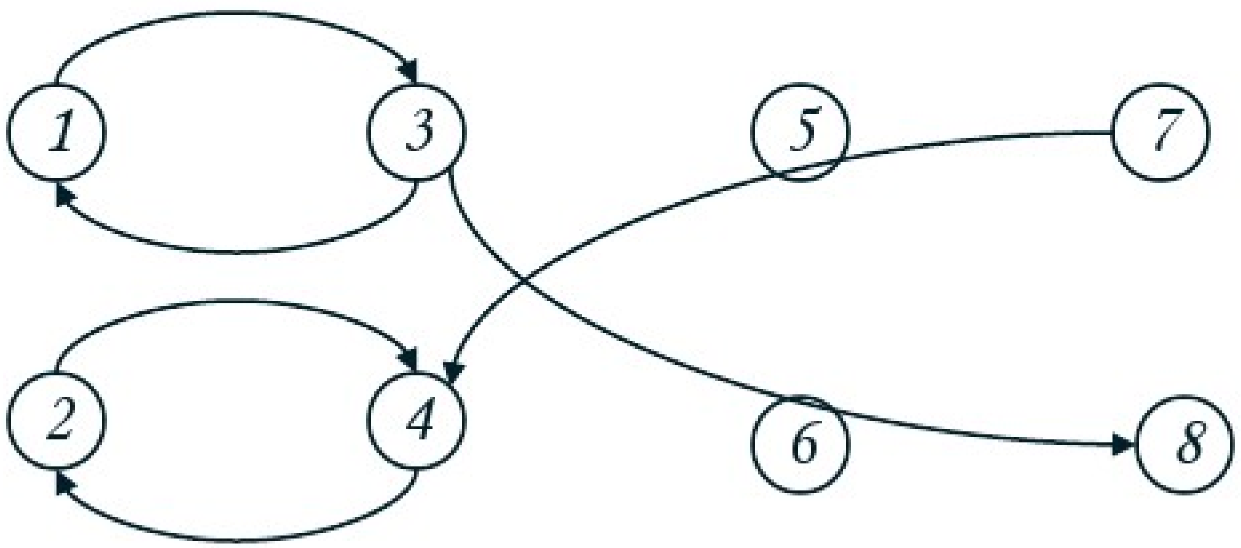
$$A_i \longrightarrow A_j'$$

$$A_j \longrightarrow A_i'$$

这样的两条边**对称**

- 我们从一个例子来看：

- 假设4个组，不和的代表为：1和4，2和3，7和3，那么构图：



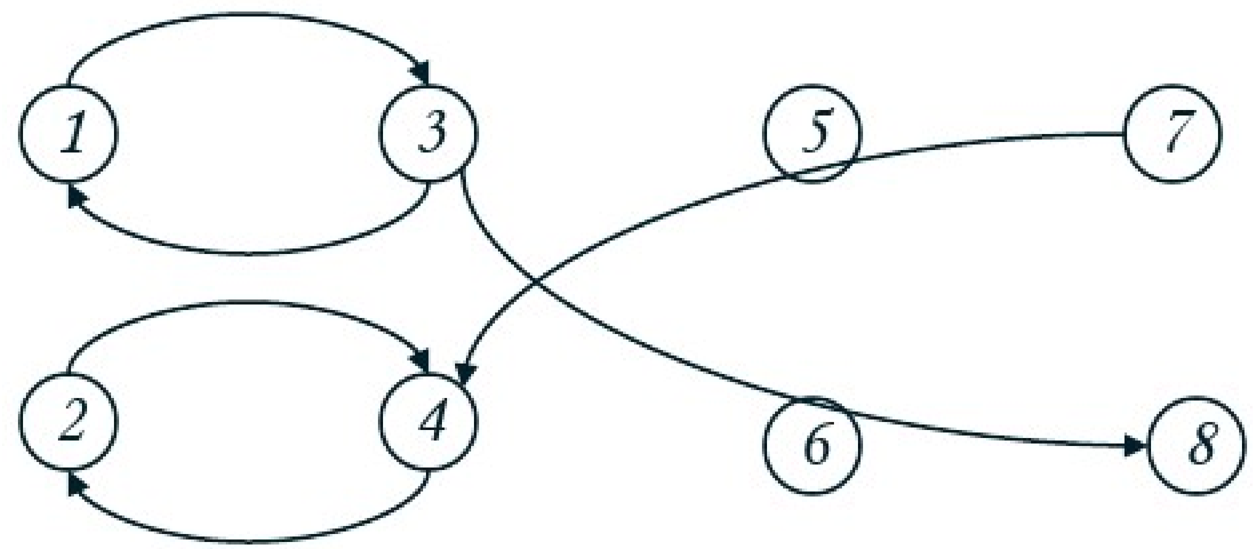
假设：

首先选1

→3必须选，2不可选

→8必须选，4、7不可选

5、6可以任选一个



- **矛盾**的情况为:

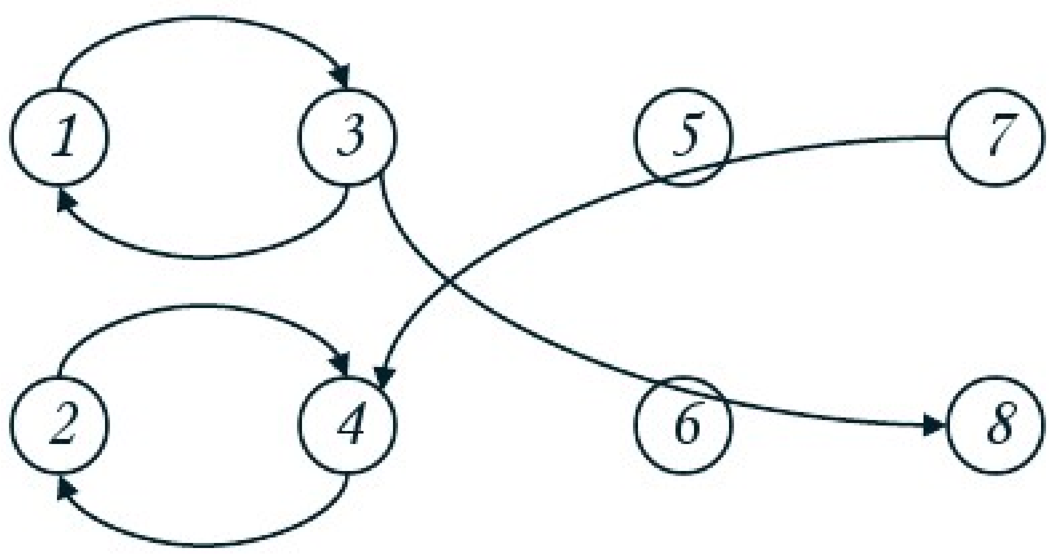
存在A_i，使得A_i既必须被选又不可选。

- 得到**算法*1***:
- 枚举每一对尚未确定的A_i, A_i'，任选*1*个，推导出相关的组，若不矛盾，则可选择；否则选另*1*个，同样推导。若矛盾，问题必定无解。

- 此算法正确性简要说明:
- 由于A_i,A_i'都是尚未确定的，它们不与之前的组相关联，前面的选择不会影响A_i, A_i'。

- 算法的时间复杂度在最坏的情况下为$O(nm)$。
- 在这个算法中，并没有很好的利用图中边的**对称**性

- 先看这样一个结构:



此图中 *1*和 *3*构成一个**环**，这样 *1*和 *3*要么都被选择，要么都不被选。

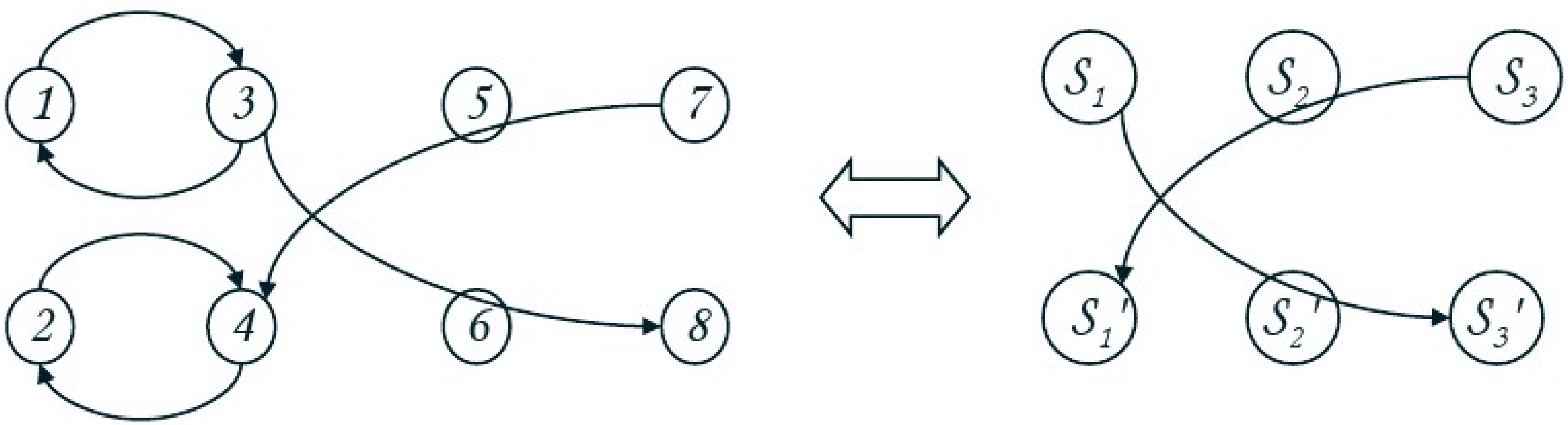
*2*和 *4*同样如此。

- 更一般的说:
- 在每个一个环里，任意一个点的选择代表将要选择此环里的每一个点。不妨把环收缩成一个子节点（规定这样的环是**极大强连通子图**）。新节点的选择表示选择这个节点所对应的环中的每一个节点。

图的收缩

- 对于原图中的每条边$A_i \longrightarrow A_j$（设A_i属于环S_i，A_j属于环S_j）如果$S_i \neq S_j$，则在新图中连边：

$$S_i \longrightarrow S_j$$



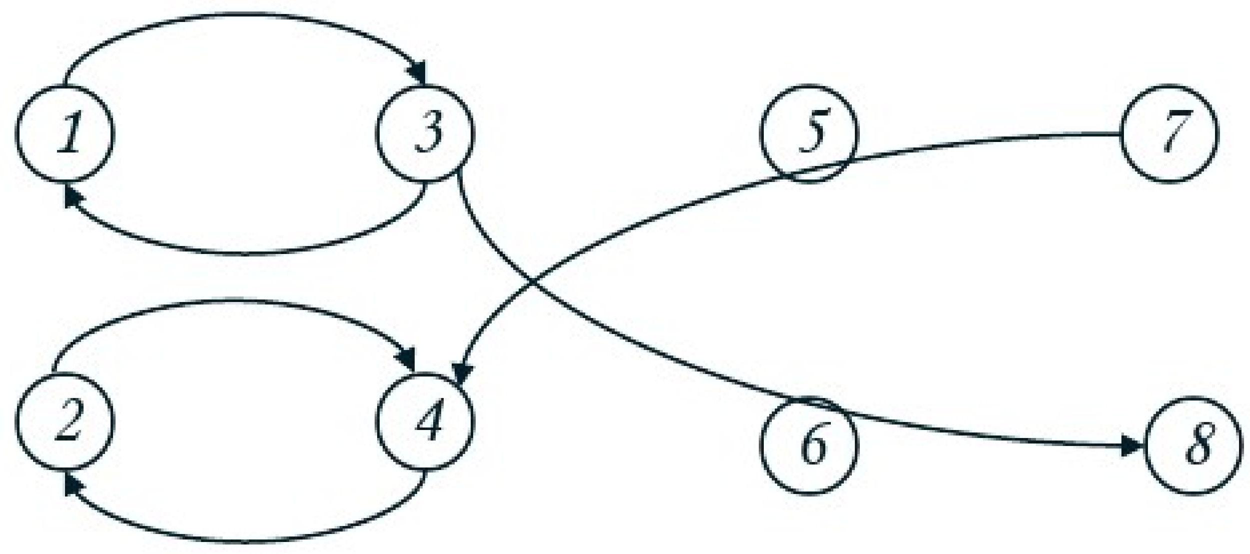
- 这样构造出一个新的**有向无环图**。
- 此图与原图**等价**。

图的收缩

- 通过求强连通分量，可以把图转换成新的有向无环图，在这个基础上，介绍一个新的算法。
- 新算法中，如果存在一对$\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i$属于同一个环，则判无解，否则将采用拓扑排序，以自底向上的顺序进行推导，一定能找到可行解。
- 至于这个算法的得来及正确性，将在下一段文字中进行详细分析。

新算法的提出

深入分析:



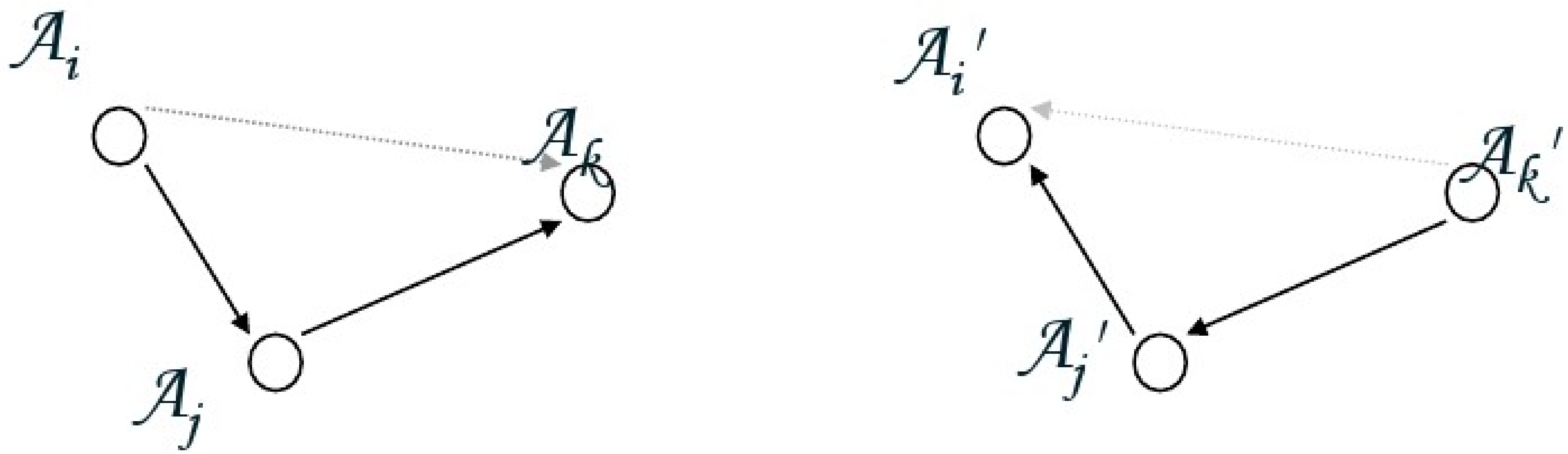
- 回忆构图的过程:
- 对于两个不相容的点 A_i, A_j, 构图方式为:

$A_i \longrightarrow A_j'$

$A_j \longrightarrow A_i'$

- 前面提到过，这样的两条边**对称**，也就是说:
- 如果存在$A_i \longrightarrow A_j$，必定存在$A_j' \longrightarrow A_i'$。

引理：原图具有对称传递性

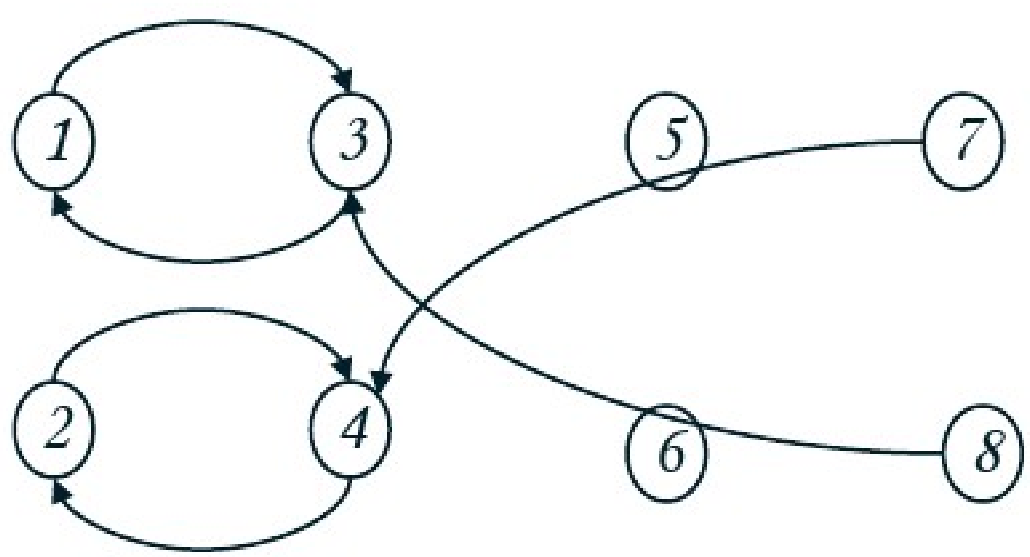


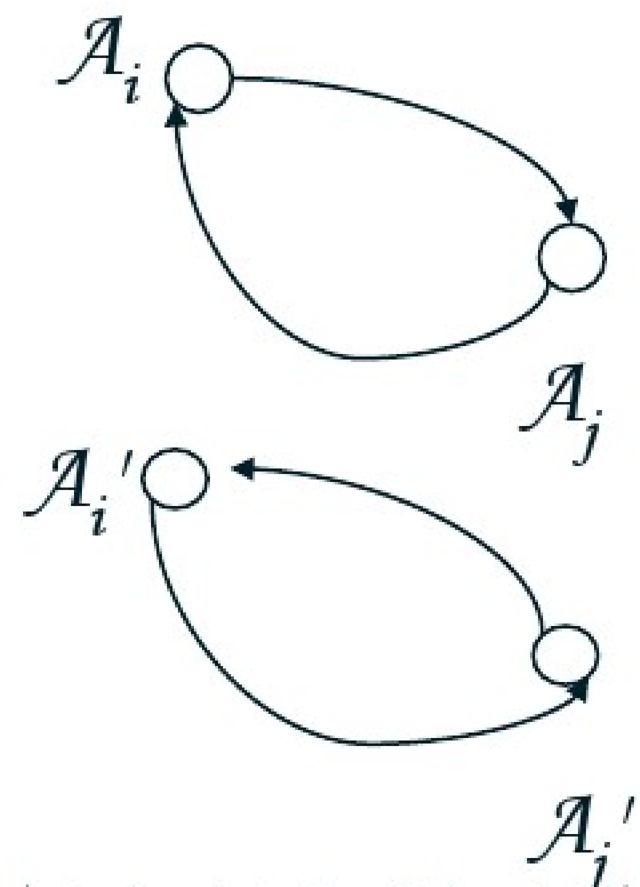
- 等价于：$\mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_k$

  $\mathcal{A}_k' \longrightarrow \mathcal{A}_i'$
- 方便起见，之后“$\longrightarrow$”代表这样一种传递关系

猜测1: 图中的环分别对称

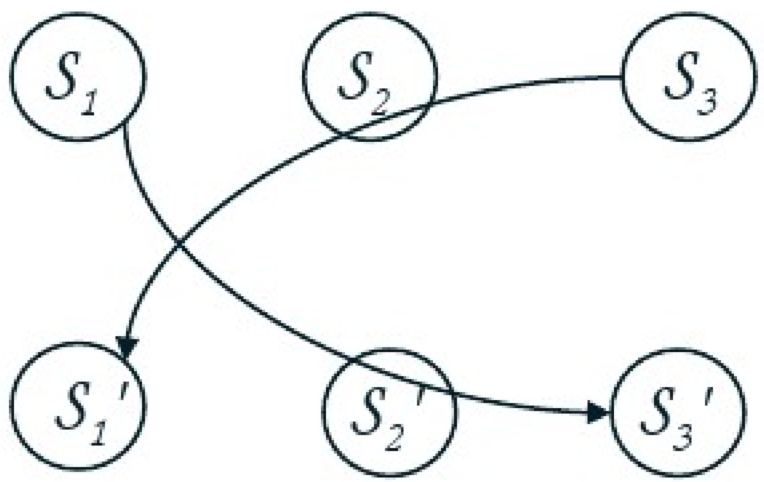
- 如果存在$\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j$，$\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j$属于同一个环（记作$S_i$），那么$\mathcal{A}_i', \mathcal{A}_j'$也必定属于一个环（记作$S_i'$）。



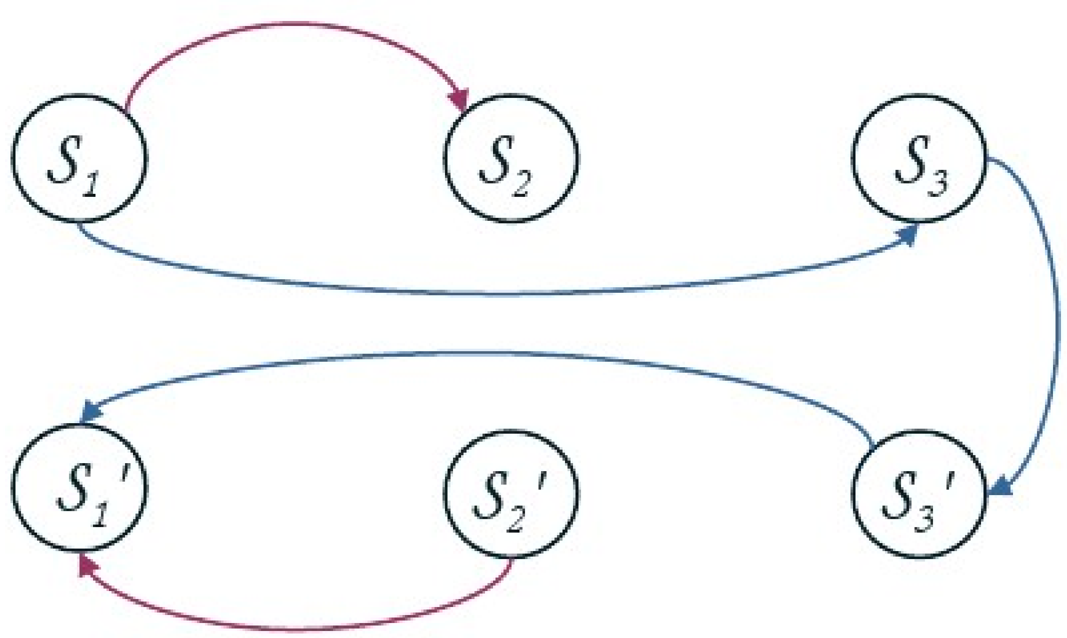


再根据前面的引理，不难推断出每个环分别对称。

推广1：新图中，同样具有对称传递性。



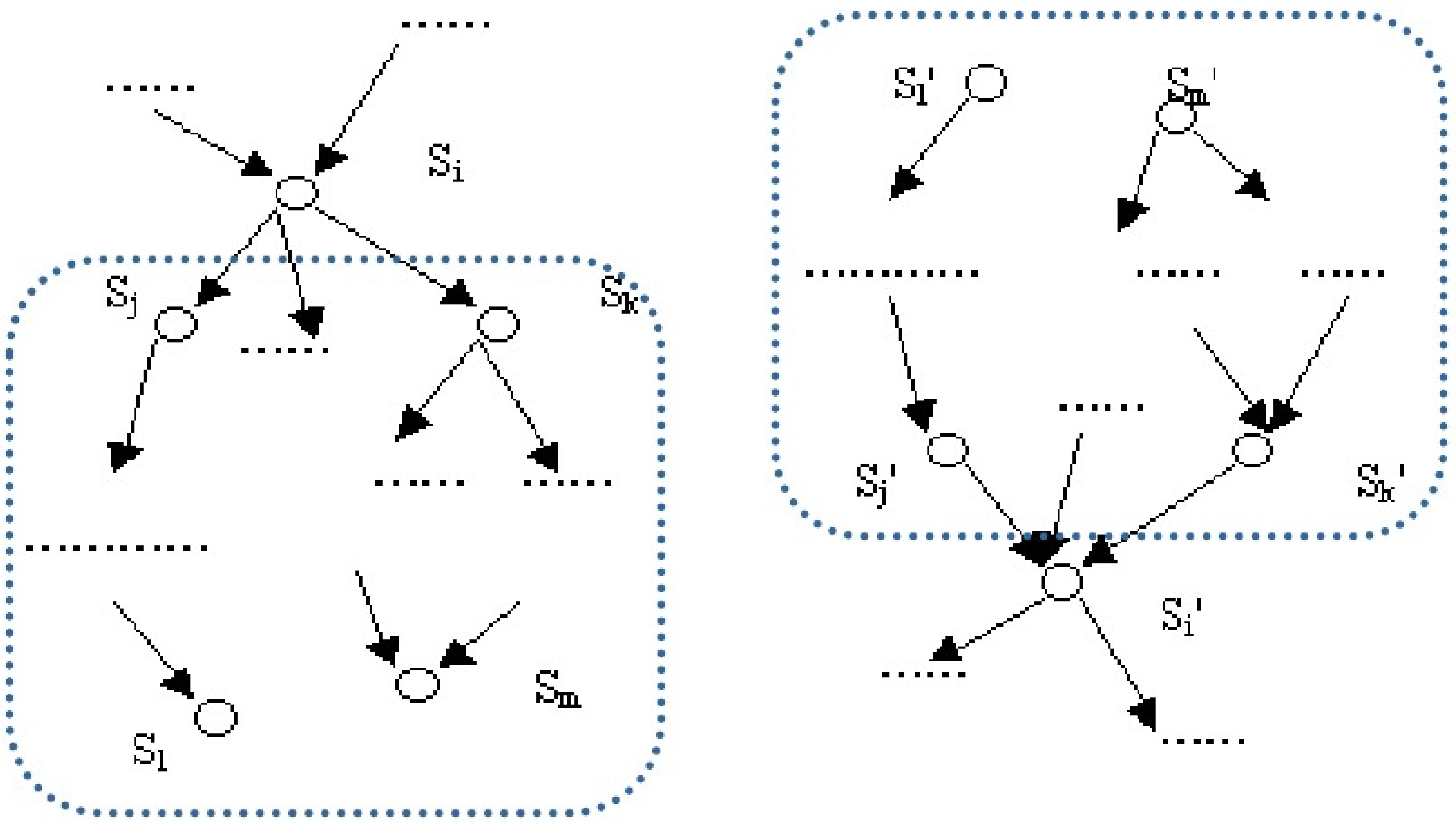
证明方式与引理相类似



一个稍稍复杂点的结构

其中红、蓝色部分分别为两组对称的链结构

■ 分开来看，更加一般的情况，即下图：
（说明：此图中S_l有可能为S_i的后代节点）



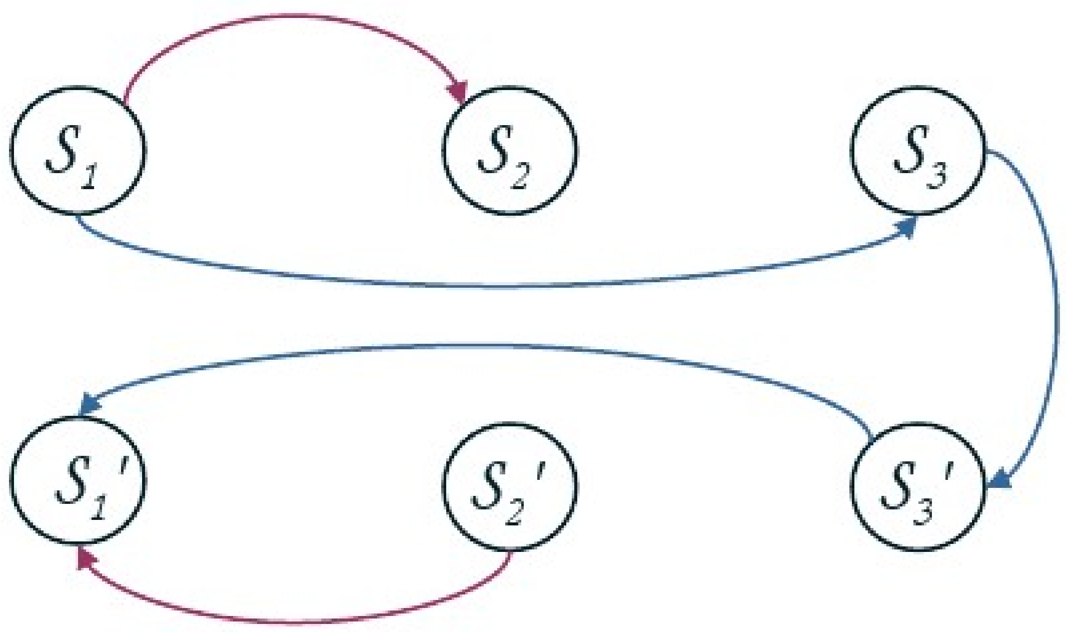
- 于是可以得到
- **推广2：对于任意一对S_i, S_i'，S_i的后代节点与S_i'的前代节点相互对称。**
- 继而提出
- **猜测2：若问题无解，则必然存在A_i, A_i'，使得A_i, A_i'属于同一个环。**
- 也就是，如果每一对A_i,A_i'都不属于同一个环，问题必定有解。下面给出简略证明：

问题的关键

- 先提出一个跟**算法1**相似的步骤：
- 如果选择S_i，那么对于所有$S_i \longrightarrow S_j$，S_j都必须被选择。
- 而S_i'必定不可选，这样S_i'的所有前代节点也必定不可选（将这一过程称之为**删除**）。

- 由推广2可以得到，这样的删除不会导致矛盾。

对称性的利用



假设选择S_3'

→选择S_3的后代节点，S_1'

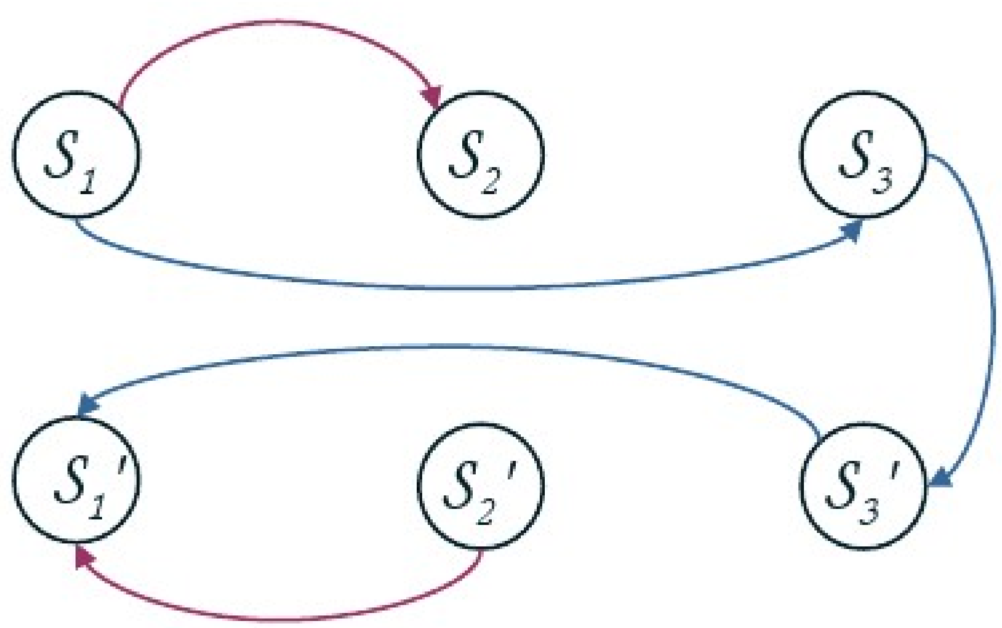
→删除S_3

→删除S_3的前代节点S_1

S_1与S_1是**对称**的

- 每次找到一个未被确定的S_i，使得不存在$S_i \longrightarrow S_i'$
  选择S_i及其后代节点而删除S_i'及S_i'的前代节点。
  一定可以构造出一组可行解。
- 因此**猜测2**成立。

- 另外，若每次盲目的去找一个未被确定的S_i，时间复杂度相当高。
- 以**自底向上**的顺序进行选择、删除，这样还可以免去“选择S_i的后代节点”这一步。
- 用**拓扑排序**实现自底向上的顺序。



一组可能的拓扑序列
(自底向上)

S_1' S_2 S_2' S_3' S_3 S_1

算法2的流程：

- *1.　构图*
- *2.　求图的极大强连通子图*
- *3.　把每个子图收缩成单个节点，根据原图关系构造一个有向无环图*
- *4.　判断是否有解，无解则输出（退出）*
- *5.　对新图进行拓扑排序*
- *6.　自底向上进行选择、删除*
- *7.　输出*

小结：

- 整个算法的时间复杂度大概是$O(m)$，解决此问题可以说是相当有效了。
- 在整个算法的构造、证明中反复提到了一个词：对称。发现、利用了这个图的特殊性质，我们才能够很好的解决问题。
- 并且，由*2-SAT*问题模型变换出的类似的题目都可以用上述方法解决。

全文总结：

- 充分挖掘图的性质，能够更好的解决问题。
- 不仅仅是对于图论，这种思想可以在很多问题中得到很好的应用。
- 希望我们能掌握此种解题的思想，在熟练基础算法的同时深入分析、灵活运用、大胆创新，从而解决更多更新的难题。