从特殊情况考虑

复旦附中 李天翼

[关键字] 特殊情况 信息学竞赛

[摘要]

从特殊情况考虑是一种重要的数学思想。而特殊情况主要分为简单情况和极端情况。

本文通过几道例题，来说明从特殊情况考虑这一思想在信息学竞赛中的应用，并提炼出它们的共同点，揭示这一思想的重要内涵。

[目录]

例 1 Bra
§1 问题描述
§2 解决方案
§3 小结
例 2 Sko
§1 问题的提出
§1.1 问题描述
§1.2 最初的想法
§2 两个预备算法
§2.1 Euclid 算法
§2.2 模线性方程的解法
§3 问题的解决
§3.1 猜想的证明
§3.2 算法的实现
§4 小结
例 3 Polygon
§1 问题描述
§2 问题的解决
§2.1 一个朴素的想法
§2.2 考虑特殊情况
总结

[正文]

例 1

1.问题描述（由 POI 2003-2004 Bra 改编）

考虑一个有 n 个门组成的电路。这些门被标号为 0、1、2、……、n-1。每个门有固定数目的输入和一个输出。输入和输出可以是 0、1、1/2 三种状态中的任意一个。每个输入连接某个门的一个输出。输入的状态与它所连接的输出状态相同。每个输出可以与数个输入相连。标号为 0 和 1 的门很特殊，它们没有输入，标号为 0 的门总输出 0，标号为 1 的门总输出 1。我们说，一个门的输出状态是“有效”的，当且仅当满足下列条件之一。

a)它等于 0 并且这个门的输入中 0 比 1 多。

b)它等于 1/2 并且这个门的输入中 0 和 1 一样多。

c)它等于 1 并且这个门的输入中 1 比 0 多。

d)它等于这个门的编号，且这个门的编号是 0 或 1。

如果所有的门的输出状态是“有效”的，那么我们说这个电路是“有效”的。如果一个门的输出状态在所有“有效”的电路中都是一样的，那么它的输出状态是固定的。保证存在“有效”的电路。

任务：

写一个程序

从标准输入中读取电路的描述

对每一个门，检查它的输出状态是否是固定的，如果是固定的，确定它的状态。

向标准输出中写入输出状态固定的门的状态

输入：

标准输入包含一个整数 n，$2 \le n \le 10000$。接下来的 n-2 行包括每个门的连接的描述。第 i 行描述第 i 个门的输入：第一个整数 k_i($k\_i \ge 1$)，表示这个门有 k_i 个输入，接下来的 k_i 个数表示这 k_i 个门的编号。行内整数之间用空格分隔。每个门的输入的总数不超过 200000。

输出：

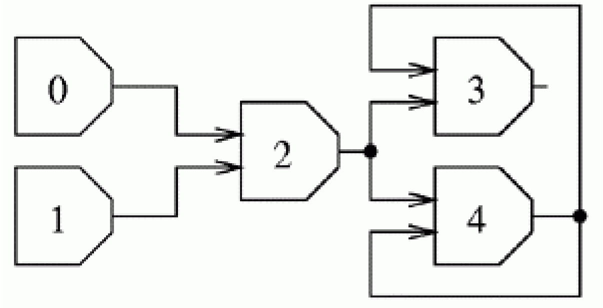
你的程序应该输出 n 行到标准输出中。第 i 行包括的内容，取决于编号为 i-1 的门的输出状态。

- 0---如果它总是 0
- 1/2---如果它总是 1/2
- 1---如果它总是 1
- ?---如果它不确定

样例：

输入数据：

5
2 0 1
2 4 2
2 2 4



输出数据：
0
1
1/2
?
?

2. 解决方案

由于图中有环，对于每个门，我们难以直接判断它的输出状态是否是固定的，这给解题带来了困难。

设 P(i)为 i 号门的输出状态$(0 \le i \le n-1)$。

令$P_{min}(i)$和$P_{max}(i)$分别为P(i)在所有“有效”的电路中能取到的最小值和最大值，它们是P(i)的极端情况。

显然，若$P_{min}(i)=P_{max}(i)$ $(0 \le i \le n-1)$，则i号门的输出状态是固定的，否则就不是固定的。

因此，我们只需要求出$P_{min}(i)$和$P_{max}(i)$。

令$C_{j,i}$表示i号门的所有输入端中，连接j号门输出端的数量。

考虑

$$\frac{\sum_{j=0}^{n-1} C_{j,i} P(j)}{\sum_{j=0}^{n-1} C_{j,i}}$$

即相当于 i 号门$(2 \le i \le n-1)$所有输入状态的平均值。

根据题目中“有效”的定义，在所有“有效”的电路中：
若该值小于 1/2，则 P(i)=0
若该值等于 1/2，则 P(i)=1/2
若该值大于 1/2，则 P(i)=1

我们进行这样的操作。先将所有的门的输出状态都标为 0，此时只有 1 号门不是“有效”的。从 1 号门开始，将它的输出状态改为 1。然后不断找到矛盾所在，进行迭代。

下面证明，如此迭代必然能够终止，并且迭代终止时，$P(i)=P_{min}(i)(0 \le i \le n-1)$。

证明：假设命题不成立。

由于操作开始时，对$\forall i(0 \le i \le n-1)$，满足$P(i) \le P_{\min}(i)$。

因为命题不成立，所以必然在某个时刻开始出现$P(k) > P_{\min}(k)$。而在此之前的那个时刻，对$\forall i(0 \le i \le n-1)$，仍然满足$P(i) \le P_{\min}(i)$。

考虑 $\dfrac{\sum_{j=0}^{n-1} C_{j,k} P(j)}{\sum_{j=0}^{n-1} C_{j,k}}$，即k号门所有输入状态的平均值。这个值已经相当大，使得P(k)取P_{min}(k)不符合要求。

注意到，$\dfrac{\sum_{j=0}^{n-1} C_{j,k} P(j)}{\sum_{j=0}^{n-1} C_{j,k}} \le \dfrac{\sum_{j=0}^{n-1} C_{j,k} P_{\min}(j)}{\sum_{j=0}^{n-1} C_{j,k}}$，这意味着不存在一个“有效”的电路，满足 $P(k) = P_{\min}(k)$。而这一点与P_{min}(k)的定义矛盾。

证毕。

由于每个门的状态最多变两次（0 变 1/2，1/2 变 1），每个门的输入的总数不超过 200000，因此在不超过 2*200000=400000 次迭代后，迭代终止。此时有P(i)= P_{min}(i) ($(0 \le i \le n-1)$。

类似的，我们可以求得P_{max}(i)$(0 \le i \le n-1)$。至此，整个问题获得解决。

3. 小结

极端情况是特殊情况的一种表现形式。题目中的许多性质，往往会通过一些具有极端性质的对象（比如本题中的取极值）表现出来。这就是使得我们可以以它们为重点考察对象，来寻找突破口和答案。

例 2

1. 问题的提出

1.1 问题描述

Sko（POI 2004-2005）

骑士在一个无限大的棋盘上移动。他能够执行的每种移动可以表示为一对整数。一对整数(a,b)表示骑士可以从坐标为(x,y)的点移动到$(x+a,y+b)$的点或$(x-a,y-b)$的点。每一个骑士有一个由若干对整数所组成的集合，这若干对整数表示了所有这个骑士可以进行的移动。对于每一个骑士，可以假定它从原点$(0,0)$出发，所能够到达的点，不全在一条直线上。

我们说两个骑士是“相同”的，那意味着两个骑士从$(0,0)$出发，所能够到达

的点（可以走任意步，且两个骑士所走的步数不一定要一样），是完全一样的。可以知道，对于每一个骑士，都有一个与他“相同”，且能被两对整数所表示的骑士。

任务：

写一个程序，进行以下操作：

- 从标准输入中读入表示这个骑士的移动的若干对整数。
- 确定两对整数，两对整数表示了一个“相同”的骑士的移动。
- 输出这两对整数到标准输出。

输入：

在标准输入的第一行中有一个整数n，表示整数对的数目$\left(3 \le n \le 100\right)$。在接下来的n行中，每行一对整数表示骑士的一种移动。在这n行中，两个整数a_i和b_i被一个空格隔开。$\left(-100 \le a_i, b_i \le 100\right)$。我们假设$\left(a_i, b_i\right)$不为$(0,0)$。

输出：

在标准输出的第一行，输出两个用空格隔开的整数 a 和 b。第二行输出两个用空格隔开的整数 c 和 d。$(-10000 \le a, b, c, d \le 10000)$ 这四个整数应该满足一个移动被$\left(a,b\right)$和$\left(c,d\right)$所描述的骑士与输入数据里描述的骑士“相同”。

样例：

输入数据：

3

24 28

15 50

12 21

输出数据：

468 1561

2805 9356

或

3 0

0 1

1.2 最初的想法

要考虑给定的骑士与什么样的骑士“相同”，首先要知道给定的骑士能到达哪些点。不妨将一个骑士从$(0,0)$点出发，能够到达的点称为该骑士的可行点。一个骑士的可行点的集合称为该骑士的可行点集。

棋盘是二维的，我们不妨考虑比较简单的一维情况。

此时，每个骑士都在一条直线上移动，如果他有 n 种移动，那么他的第 i 种移动$\left(1 \le i \le n\right)$可以表示为一个整数$\left(a_i\right)$，令$r = \left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)$，则他能够到达横坐标为 X 的点的充要条件是 r|X。

对于不退化的二维情况（即骑士所能够到达的点，不全在一条直线上），可

以猜想他的可行点集与满足下列三个条件之一的所有点的集合相同。

这三个条件是：(1)r|X+Y

(2)r|X+qY

(3)r|pX+qY

(p,q,r 均为待定整数)。

考虑n=2,$(a_1,b_1)=(2,3),(a_2,b_2)=(6,6)$的情况，易知前两种假设是错误的。对于最后一种假设，由于参数比较多，一时难以判断其是否正确。

2. 两个预备算法

2.1Euclid 算法

将非负整数 a 和 b 的最大公约数表示为 gcd(a,b)。

求最大公约数最常用的方法是 Euclid 算法，这个算法基于以下的定理。

GCD 递归定理

对于任意的非负整数 a 和任意的正整数 b，有

gcd(a,b)=gcd(b,a mod b)

证明：先证 gcd(a,b)∣gcd(b,a mod b)。令 d= gcd(a,b)，则 d∣a 且 d∣b。a mod b=a-qb，这里 q=$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$。因为 d∣a 且 d∣qb，所以 d∣a-qb，即 d∣a mod b。因此，gcd(a,b) ∣gcd(b,a mod b)。

再证 gcd(b,a mod b)∣gcd(a,b)。令 d=gcd(b,a mod b)，则 d∣b 且 d∣a-qb，所以有 d∣a，因此 gcd(b,a mod b)∣gcd(a,b)。

因为 gcd(a,b)∣gcd(b,a mod b)且 gcd(b,a mod b)∣gcd(a,b)，所以 gcd(a,b)=gcd(b,a mod b)。

Euclid 算法的伪代码如下

```
Euclid(a,b)
  if b=0
    then return a
    else return Euclid(b,a mod b)
```

考虑 Euclid 过程的调用次数。

不妨设 a>b≥0，否则若 b>a ≥0，执行一次之后就会调用 Euclid(b,a)，若 b=a>0，则该过程只执行一次。

令$F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$（k为任意正整数），下面证明：如果a>b ≥0且Euclid(a,b)执行了n≥1 次递归调用，则$a\geq F_{n+2}$，$b\geq F_{n+1}$。

证明：当n=1 时，$b\geq 1=F_2$，又a>b，有$a\geq 2=F_3$故命题显然成立。

假设当 n=k 时命题成立。（k 为不小于 1 的整数）

当 n=k+1 时，因为k>0，所以b>0，并且Euclid(a,b)递归调用，根据归纳假设，可知$b\geq F_{k+2}$，并且有(a mod b)$\geq F_{k+1}$。我们有

$$b+(a \bmod b)=b+(a-\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b)\le a$$

因此，$a\ge b+(a \bmod b)\in F_{k+2}+F_{k+1}=F_{k+3}$。

故当 n=k+1 时，命题也成立。

由上面的命题，可以得到一个推论：对于任意整数$k\ge 1$，如果$a>b=0$ 且$b<F_{k+1}$，则Euclid(a,b)的递归调用次数少于k次。

因为$F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$，所以Euclid算法的时间复杂度上界为O(lg(min(a,b))。

2.2 模线性方程的解法

2.2.1 模线性方程的定义

模线性方程是指形如 $ax\equiv n(\bmod b)$的方程。（其中 a,b,x,n 均为整数，且 $ab\neq 0$）

2.2.2 模线性方程的解

考虑一般的模线性方程 $ax\equiv n(\bmod b)$，可以转化为方程 ax+by=n。

若 n 不能被 gcd(a,b)整除，此时显然无解。

若 n 能被 gcd(a,b)整除。

令 d=gcd(a,b)。考虑一个比较特殊的方程 $ax\equiv d(\bmod b)$

此时方程可以改写为 ax+by=d。令 $a'=\frac{a}{d}$，$b'=\frac{b}{d}$。根据裴蜀定理，存在整数p,q 满足 a’p+b’q=1，因此该方程有解。

令 $x_0=\frac{pn}{d}$，则必有$ax_0\equiv n(\bmod b)$，即x_0为该方程的一个特解。

令$x=x_0+\frac{mb}{d}$(m为任意整数)，可知此时也有$ax\equiv n(\bmod b)$。另外，对于任意的x_1，若$ax_1\equiv n(\bmod b)$，则有$b\mid a(x_1-x_0)$，即$\frac{b}{d}\mid x_1-x_0$。

2.2.3 求特解的方法

方程 $ax\equiv d(\bmod b)$的一个特解可以由下面的伪代码得出。

```
Extend_Euclid(a,b)
   if b=0
      then return(a,1,0)
   (d',p',q') ←Extend_Euclid(b,a mod b)
   (d,p,q) ←(d',q',p'-[a/b]q')
   return(d,p,q)
```

对于一般的模线性方程 $ax\equiv n(\bmod b)$，下面的伪代码可以给出一个特解。

```
Modular_Linear_Equation_Solver(a,n,b)
    (d,x',y') ←Extended_Euclid(a,b)
    if d|n
        then x←x' (n/d) mod b
        else no solution
```

易知，该算法的时间复杂度也为 O(lg(min(a,b)))。

3. 问题的解决

3. 1 猜想的证明

3.1.1 猜想的特殊化

设 S(p,q,r)为所有满足 r|pX+qY(p,q,r 均为整数，r≠0)的点的集合。

考虑原先的猜想，也是现在求证的命题：对于不退化的二维情况（即骑士所能够到达的点，不全在一条直线上），存在整数 p,q,r，r≠0，满足骑士的可行点集与 S(p,q,r)相同。

当 n=1 时，退化为一维情况（即骑士所能够到达的点，全在一条直线上），不满足该猜想。

由于 n 的上限是 100，比较大，不方便讨论，可以先考虑比较简单的 n=2。（n=2 是最小的非退化情况）。下面的讨论说明，也只需要讨论 n=2。

假设当n=k（k为任意正整数）时猜想成立，当n=k+1 时，设只有前k种移动的骑士的可行点集与S(p,q,r_0)相同。则对有全部k+1 种移动的骑士而言，(X,Y)是他的可行点的充要条件是存在整数m满足p(X-ma_{k+1})+q(Y-mb_{k+1})≡0(mod r_0)。

上式等价于(pa_{k+1}+qb_{k+1})m≡pX+qY(mod r_0)。考虑这个模线性方程，知它有解等价于(pa_{k+1}+qb_{k+1}, r_0)｜pX+qY。令r=(pa_{k+1}+ qb_{k+1}, r_0)，知当n=k+1 时猜想也成立。

所以，如果解决了 n=2，那么 n≥2 的所有情况就都被解决了。

当n=2 时，骑士只有两种移动(a_1,b_1)和(a_2,b_2)。且a_1b_2-a_2b_1<>0（否则退化为一维情况）。

为了能更好地挖掘这个问题的本质，不妨证明简单一点的命题 1。

命题 1:骑士有两种移动(a_1,b_1)和(a_2,b_2)，a_1b_2-a_2b_1<>0，a_1和a_2互质，b_1和b_2互质，存在整数p,q,r，r≠0，满足骑士的可行点集与S(p,q,r)相同。

命题 1 与原命题的本质区别在于，它增加了一个条件：a_1和a_2互质，b_1和b_2互质。

3.1.2 命题 1 的构造性证明

根据裴蜀定理，存在整数 x,y 满足 $a_1x+a_2y=1$,设 s_1,s_2 为满足 $a_1s_1+a_2s_2=1$的两个整数。

令 $p=b_1s_1+b_2s_2, q=-1, r=a_1b_2-a_2b_1$

先证必要性，即若点 (X,Y) 是骑士的可行点，则 $r\,|\,pX+qY$。

$$\begin{aligned} pa_1+qb_1 &= \left(b_1s_1+b_2s_2\right)a_1-b_1=(a_1s_1-1)b_1+b_2s_2a_1 \\ &=-a_2s_2b_2+a_1s_2b_2=s_2(a_1b_2-a_2b_1)=s_2r \end{aligned}$$

同理 $pa_2+qb_2=-s_1r$

由于点$\left(X,Y\right)$是骑士的可行点，设骑士将移动$\left(a_1,b_1\right)$执行c次，移动$\left(a_2,b_2\right)$执行d次后，从原点到达点$\left(X,Y\right)$ 。

$$\begin{aligned} &\because pX+qY=p\left(ca_1+da_2\right)+q\left(cb_1+db_2\right) \\ &=c(pa_1+qb_1)+d(pa_2+qb_2)=cs_2r-ds_1r=r\left(cs_2-ds_1\right) \end{aligned}$$

$$\therefore r\,\middle|\,pX+qY$$

再证充分性，即若$r\mid pX+qY$， 则点$\left(X,Y\right)$是骑士的可行点。

由于$r\mid pX+qY$， 设 $pX+qY=kr$ 即 $pX-Y=kr$

$$\begin{aligned} &\because X=X\cdot 1+0=X\left(a_1s_1+a_2s_2\right)+\left(ka_1a_2-ka_1a_2\right) \\ &=\left(Xa_1s_1+ka_1a_2\right)+\left(Xa_2s_2-ka_1a_2\right) \\ &=(Xs_1+ka_2)a_1+\left(Xs_2-ka_1\right)a_2 \\ &Y=pX+(Y-pX)=Xp-kr \\ &=X\left(b_1s_1+b_2s_2\right)b_1-k\left(a_1b_2-a_2b_1\right) \\ &=\left(Xb_1s_1+ka_2b_1\right)+\left(Xb_2s_2-ka_1b_2\right) \\ &=\left(Xs_1+ka_2\right)b_1+\left(Xs_2-ka_1\right)b_2 \end{aligned}$$

∴骑士将移动(a1,b1)执行(Xs1+ka2)次，移动(a2,b2)执行(Xs2-ka1)次之后，将从原点到达点(X,Y)。

至此，命题 1 得证。

3.1.3 回到猜想

现在，要证明原先的猜想，只要把它转化为命题 1 即可。

命题 1 的特殊性在于，a_1和a_2互质，b_1和b_2互质。

不妨令$d_1=(a_1,a_2)$ ，$d_2=(b_1,b_2)$。则考虑拥有$(a_1/d_1, b_1/d_2)$和 $(a_2/d_1,b_2/d_2)$两种移动的骑士，存在整数p,q,r，$r\neq 0$，满足骑士的可行点集与S(p,q,r)相同。

令 d=(p,q)，只考虑 d=1 的情况，否则令 p=p/d,q=q/d,r=r/d。

应有(p,r)=1，否则S(p,q,r)中的点的纵坐标都是(p,r)的倍数，与b_1/d_2和b_2/d_2互质这一条件矛盾。

设$(r,d_1)=m,d_1=mt$。不定方程$rx\equiv 1-p\left(\bmod\ t\right)$必然有整数解。设x0 为该不定方程的一个解，令p’=rx0+p，必有(p’,m)=1,(p’,t)=1，因此$(p’,d_1)=1$。

类似地，可以得到 q’。

p’和q’满足(p’,d1)=1,(q’,d2)=1，那么可知拥有(a_1, b_1)和(a_2,b_2)两种移动的骑士的可行点集为$S(p’d_2,q’d_1,rd_1d_2)$。

至此，原先的猜想已获得证明。

3.2 从证明到算法

3.2.1 一个辅助过程

通过对猜想的证明，我们可以将一个只有两种移动的骑士的可行点集用 S(p,q,r)表示出来。再根据前面对 n>2 的构造性证明，能够被表示的范围扩大到任意骑士。可是，问题要求输出的是一个只有两种移动，但可行点集为 S(p,q,r) 的骑士，所拥有的移动。

令 d=(p,q)，不妨设 d=1，否则令 $p=\frac{p}{d},q=\frac{q}{d},r=\frac{r}{d}$。

令d_1=(p,r),d_2=(q,r),p'=p/d_1,q'=q/d_2,r'= r/($d_1 \times d_2$)

令 t 为模线性方程 q't≡-1(mod r')的一个解

则(0,d_2r')和(d_1,d_2t)符合要求,其正确性可由命题 1 的证明中得出。

3.2.3 主过程

该算法的基本思想是：将骑士的可行点集转化为 S(p,q,r)的形式，再将这个形式转化成一个只有两种移动的骑士的可行点集。

设P为所有a_i和b_i中($1\le i\le n, n\in N$)中绝对值最大的一个数，则该算法的时间复杂度为O(nlg|P|)。

4. 小结

有些题目条件与结果之间的联系不很明显，难以找到突破口，从原始而又不失其重要性的地方（比如本题中的一维情况），能够看清楚问题；或者将简单情形（本题中的命题 1）作为一面镜子来为一般情形（本题中的猜想）造成某种对比，从对比中发现两种情形最本质的不同之处，再对症下药，求得问题的彻底解决。

特别地，在某些构造类的问题中，可行的情况很多，但我们只需要其中的一个。此时只需要考虑某种较为简单的情况（本题中的从命题 1 到命题 2），从而迅速有效地解决问题。这样的例子有很多，比如例 3。

例 3

1 问题描述

Polygon(BOI2005)

寻找一个凸多边形，使它的边都具有给定的长度。

输入：

文件名为poly.in。文件的第一行中包含一个整数n$\left(3\le n\le 1000\right)$，表示该凸多边形的边数。接下来的n行，每行包含一个整数$a_i$$\left(1\le a_i\le 10000\right)$，表示n条边的长度。

输出：

如果这样的凸多边形存在，那么输出文件poly.out应该包含n行。每一行应该

包含两个实数x_i和y_i（$|x_i|,|y_i|<=10,000,000$）。连接(x_i,y_i)和$(x_{i+1},y_{i+1})(1<=i<=n-1)$以及$(x_n,y_n)$和$(x_1,y_1)$，要求能得到一个多边形，每条边的长度与给定的相同，但是不要求有相同的顺序。

输出的点的顺序可以是顺时针，也可以是逆时针。

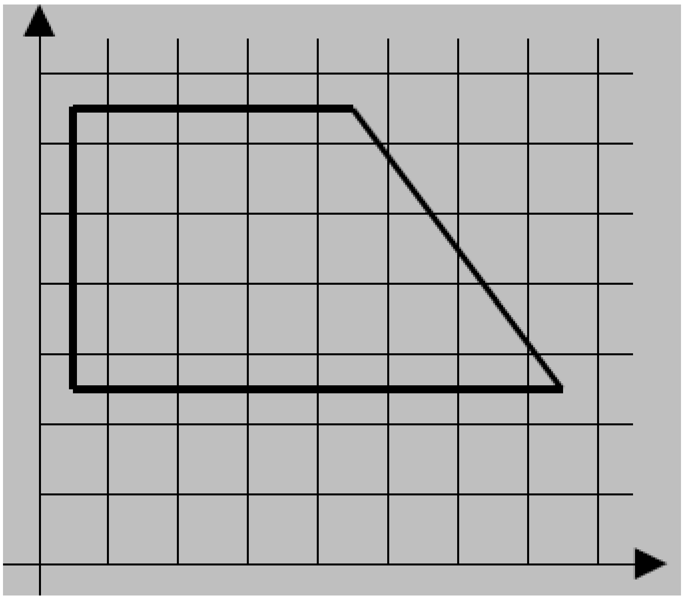
如果这样的凸多边形不存在，只要输出'NO SOLUTION'。

样例输入：

4
7
4
5
4

样例输出：

0.5 2.5
7.5 2.5
4.5 6.5
0.5 6.5



评测：

如果两个实数的差的绝对值不超过0.001，就被评测程序认为是相同的。任何浮点输出格式都可以被接受。

2 问题的解决

因为边之间没有顺序，所以可令 $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n$ 。

明显地，若 $\sum_{i=2}^{n} a_i \le a_1$，则无解，反之则有解。

下面只讨论有解的情况。

2.1 一个朴素的想法

随便选一个初始点(x_1,y_1)。向外连出边。当连第k条边时，设d为(x_1,y_1)与(x_{k+1},y_{k+1})的距离，要求满足 $d < \sum_{i=k+1}^{n} a_i$ 且 $a_{k+1} < d + \sum_{i=k+2}^{n} a_i$，最后必然能够回到起点。

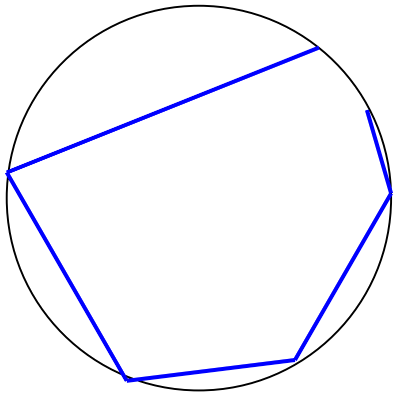
然而，这种处理方法只能保证闭折线段的每一段长度与给定的相同，却不能保证它不自交，更不能保证它是凸的。

2.2 考虑特殊情况

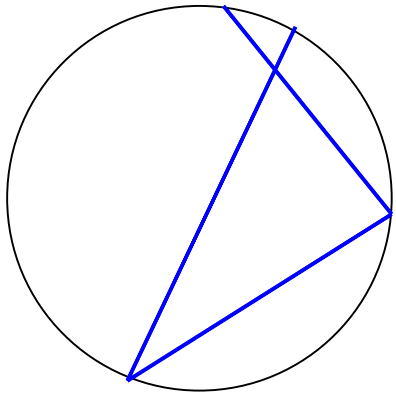
我们考虑一种比较特殊的情况：如果这凸 n 边形是一个圆的内接 n 边形呢？

显然，任何圆内接多边形都是凸的，因此一个圆的内接 n 边形每条边长都与给定的相同，则该多边形必然符合要求。故只需求出该圆的直径。

假定 d 已知，以(0,0)为圆心，由(d/2,0)点为起始点，按照顺时针方向，构造凸 n 边形。



a_1与a_n未相交，说明d太大了



a_1与a_n交错，说明d太小了

因为 d 的取值范围是连续的，所以满足条件的 d 必然存在，而且可以用二分法求出。

设该多边形的外接圆直径为 d，则第 i 条边所对应的圆心角为$2\arcsin\frac{a_i}{d}$。显然，$d \ge a_1$。

考虑$\sum_{i=2}^{n} 2\arcsin\frac{a_i}{d}$与$\pi$的大小关系，分三种情况考虑

(1) 两者相等。此时，令d=a_1，即可符合要求。

(2) 前者大，此时满足要求的圆，圆心在多边形内。直径 d 满足 $\sum_{i=1}^{n} 2\arcsin\frac{a_i}{d} = 2\pi$。由于最长边所对应的圆周角不小于$\frac{2\pi}{n}$，故 $d <= \frac{a_1}{\sin\frac{\pi}{n}}$。

(3) 后者大，此时满足要求的圆，圆心在多边形外。直径d满足 $\sum_{i=2}^{n} 2\arcsin\frac{a_i}{d} = 2\arcsin\frac{a_1}{d}$。此时d可能很大，然而，由于数据范围的限制 ($n \le 1000, a_i \le 10000$, a_i均为整数)，事实上的d最大值只有 $5*10^5$左右。

至此，本题已获得解决。

[总结]

面对大千世界，我们经常只会看到事物的整体上的表象，并凭着自己的感觉越走越远。殊不知，自己被这表象所蒙蔽，从而无法探寻其中所隐藏的奥秘。

毕达哥拉斯认为“万物皆数”。从特殊情况考虑，事实上是一种数学思想，它能够帮助我们在各个方面，包括信息学竞赛中，更好地认识事物的本质。

认识了事物的本质，我们就能够比较轻松地解决问题。而且，还能够在解决问题的过程中，得到有益的启示，为处理类似情况提供对策，这一点比解决一个问题本身更为重要。

[参考资料]

1. 《Introduction to Algorithms》2nd edition by Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein
2. 《实用算法的分析和程序设计》 by 吴文虎 王建德
3. 《从特殊性看问题》 by 苏淳