半平面交的算法及其应用

基本概念

半平面：平面上的直线及其一侧的部分，在直角坐标系中可由不等式 $ax+by+c>=0$ 确定。

在一个有界区域里（在实际计算时不妨设一个足够大的边界），半平面或半平面的交是一个凸多边形区域。

n 个半平面的交 $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$ 是一个至多 n 条边的凸多边形。

算法

半平面交的联机算法

procedure intersection of half-planes
输入：n 个半平面 $H_1,H_2,\ldots H_n$ 对应的不等式组 $a_ix+b_iy+c_i>=0$，$i=1,2,3\ldots n$
输出：$H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$

初始化区域 A 为整个平面

依次用直线 $a_ix+b_iy+c_i=0$，$i=1,2,\ldots n$ 切割 A，保留使不等式 $a_ix+b_iy+c_i>=0$ 成立的部分

输出 A

本算法的时间复杂度为 $O(n*n)$，并具有联机的优点。

半平面交的分治算法

假设可以在 $O(m+n)$ 的时间内将 m 个半平面的交和 n 个半平面的交合并，则可以有一种 $O(n*log(n))$ 的分治算法求半平面的交。

Procedure intersection of half-plane (D&C)
输入：n 个半平面 $H_1,H_2,\ldots H_n$ 对应的不等式组 $a_ix+b_iy+c_i>=0$，$i=1,2,3\ldots n$

北京四中 李澎煦
2002 年 1 月

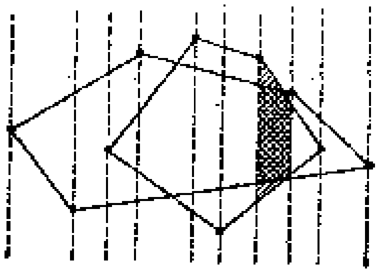
输出：$H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$

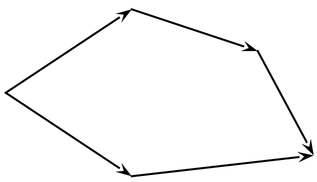
将 $H_1 \ldots H_n$ 分成两个大小近似相等的集合

在每个子问题中递归地计算半平面的交

合并两个凸多边形区域形成 $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$

所以问题的关键就是怎样在 $O(m+n)$ 的时间里求两个凸多边形的交。





如左图所示，在 $O(m+n)$ 的时间内将两个凸多边形沿平行于 y 轴方向切割成至多 $O(m+n)$ 个梯形区域，每两个梯形区域的交可以在 $O(1)$ 时间内解决。

为了便于操作，确定凸多边形采用了一种特殊的方法。可以看出凸多边形上方和下方的顶点分别构成了一个 x 坐标递增序列。将这两个序列中的顶点分别作为一个链表存储,得到确定凸多边形区域的上界和下界。

算法：

procedure intersection of convex polygon

输入：两个凸多边形区域 A、B

输出：$C=A \cap B$

1. 将两个凸多边形的顶点 x 坐标分类，得到序列 $x_i, i=1 \ldots p$
2. 初始化区域 C 为空。
3. 处理 $\{x_1\}$
4. 依次处理区域 $(x_i, x_i+1], i=1 \ldots p-1$。

3 4.1 计算两个多边形在此区域里截得的梯形（可能退化），设为 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$。

4　4.2 求交点 $AB\cap A'B'$、$AB\cap C'D'$、$CD\cap A'B'$，将存在的点按 x 坐标排序，删除重复，添加到 C 的上界中。用类似的方法求 C 的下界

4.3 计算此区域的右侧边界：$EF=BC\cap B'C'$。将 E、F 分别加入 C 的上界和下界。

5.输出 C

步 1：由于 A、B 的上下界 x 坐标分别有序，可采用归并排序。复杂度 $O(m+n)$

步 4：由于是按照 x 递增的顺序扫描这些区域，每条边界上的指针在整个过程中始终向右移动。两个多边形的每个顶点至多扫描一次。复杂度为 $O(m+n)$。

因此整个算法的时间复杂度为 $O(m+n)$。

应用

问题 1：Hotter and Colder (Waterloo local contest)

题目简述：

A 和 B 在 $10*10$ 的棋盘上进行一个游戏。A 确定一个点 P，B 每回合移动一次。每次 A 都会告诉 B，他当前所处的位置是离 P 更近了(*Hot*)还是更远了(*Cold*)。（原题还要考虑距离不变的情况。）

请在 A 每次回答后，确定 P 点可能存在的区域的面积。

分析：

假设 B 从 C（x_1,y_1）移动到了 $D(x_2,y_2)$，A 回答 *Hot*。则对应这一回合，点 $P(x,y)$ 所处的位置满足 $|CP|>|DP|$，即：

$(2*x_2-2*x_1)*x+(2*y_2-2*y_1)*y+x_1*x_1+y_1*y_1-x_2*x_2-y_2*y_2>0$。

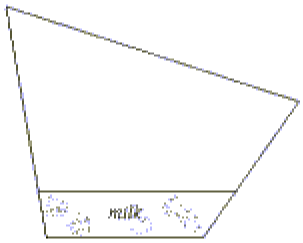
类似地，回答 *Cold* 对应于另一个不等式。

初始时可能的区域是 $[0,10]*[0,10]$。每回合后都用相应的不等式对应的半平面与当前区域求交。并输出交的面积。

问题 2：Milk (OOPC1)

题目简述：

SRbGa 有一块凸 n 边形面包，和一盆面积足够大但深度仅为 h 的牛奶。他想仅蘸 k 次



（每次都保证面包垂直于盆底），使得面包蘸上牛奶的部分面积最大。

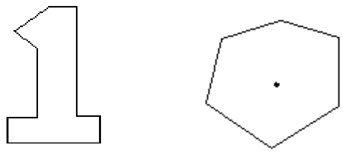
分析：

由于本题规模不大，考虑使用深度优先搜索。

蘸每条边都对应剩下的一个半平面，某种蘸 k 条边 $E_1 \ldots E_k$ 的方法，剩下的部分就对应于这 k 个半平面和原多边形的交。考察 $C(n,k)$ 种蘸法，选其中剩下的面积最小的那种。

问题 1 是用几个半平面顺次求交，并且每次都要输出面积。显然采用联机算法合适。
问题 2 如果用联机算法，复杂度为 $O(C(n,k)*n)$，且便于在搜索的过程中剪枝。如果用脱机的分治算法，复杂度为 $O(C(n,k)*(n+k*\log(k)))$。

问题 3：Video (CTSC98)



题目简述：

已知一个多边形 P（不一定是凸的）

问在 P 中是否存在点 Q，在 Q 点能观察到整个多边形区域。

分析：

假设多边形的边界点按逆时针方向给出 $V_0V_1V_2\ldots V_n$，$V_0=V_n$。则能够观察到边 V_iV_{i+1} 的点 Q_i 一定满足

$$\overrightarrow{Q_iV_i} * \overrightarrow{Q_iV_{i+1}} \geq 0, i = 0 \ldots n-1$$

而且能观察到所有边的点一定能够观察到整个多边形区域。

如果用坐标进行叉积运算，则每个约束条件都对应一个二元一次不等式（也对应于一个半平面）。本题就转化为求这 n 个半平面的交是否不为空。

问题 4：Triathlon (NEERC2000)

题目简述：

n 名选手参加铁人三项赛，比赛按照选手在三个赛段中所用的总时间排定名次。已知每名选手在三个项目中的速度 U_i、V_i、W_i。

问对于选手 i，能否通过适当的安排三个赛段的长度（但每个赛段的长度都不能为 0），来保证他获胜。

分析：

假设三个赛段的长度分别为 x、y、z，则选手 i 获胜的充要条件就是：

$$\frac{x}{u_i}+\frac{y}{v_i}+\frac{z}{w_i}<\frac{x}{u_j}+\frac{y}{v_j}+\frac{z}{w_j}, i \neq j$$

这是一个三元齐次不等式组，由于 $z>0$，所以不妨将每个不等式两侧都除以 z,并令 $X=x/z$，$Y=y/z$，就得到：

$$\left(\frac{1}{u_j}-\frac{1}{u_i}\right)*X+\left(\frac{1}{v_j}-\frac{1}{v_i}\right)*Y+\left(\frac{1}{w_j}-\frac{1}{w_i}\right)>0$$

本题就转化为求这 $n-1$ 个不等式对应的半平面的交，并判断其面积是否大于 0（即排除空集、点、线段的情况）。

问题 3 和问题 4，最终都转化为二元不等式组解的存在性问题。可以用分治算法较有效地解决。

问题 5：Run away（CERC99）

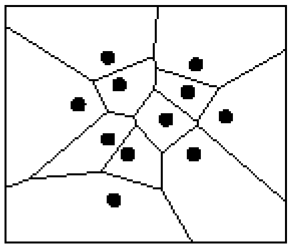
题目简述：

在一个矩形 R 中有 n 个点 $P_1 \dots P_n$，请找出一个点 $Q \in R$ 使得 $min(|QP_i|)$最大。

分析：

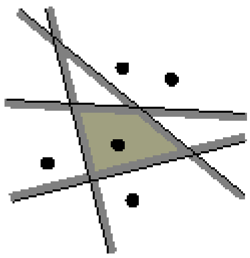
将 R 分成 n 个区域，$Q_1 \dots Q_n$，Q_i 是离 P_i 点的距离比离其它点都小的点的集合：

$$Q_i=\left\{Q \middle\| QP_j\right| \geq \left|QP_i\right|, j \neq i\right\} \cap R$$



Q_i 可通过在 P_iP_j 的中垂线 P_i 一侧的半平面的交求得。Q_i 为一个凸多边形。

在 Q_i 里，离 P_i 最远的点只能出现在 Q_i 的顶点上。求其中最远的点即可。



求半平面的交采用分治算法，复杂度为 $O(n*log(n))$，对应于 P_i 的多边形最多有 $O(n)$个顶点，因此求 Q_i 中的最远点复杂度为 $O(n)$。

总的复杂度为 $O(n*n*log(n))$。

实际上，由以上方法定义的 n 个多边形区域 $Q_1 \dots Q_n$ 就组成了一个 ***Voronoi* 图**。*Voronoi* 图是计算几何中仅次于凸包的几何对象，有着非常广泛的应用。利用半平面的交求 *Voronoi* 图的方法并不是最优的，分治法、平面扫描法等许多算法都能达到 $O(n*log(n))$的复杂度，并且是最优的。但这些算法都过于复杂，不属于本文讨论的范围。

北京四中 李澎煦
2002 年 1 月

参考书目

《计算几何导论》作者：[美]F·P·普霍帕拉塔 M·I·沙莫斯 1990 年 11 月第 1 版
《计算几何——算法分析与设计》作者：周培德 2000 年 3 月第 1 版

北京四中 李澎煦
2002 年 1 月

半平面交的算法及其应用

北京四中
李澎煦

基本概念

- **半平面：** 平面上的直线及其一侧的部分。
- 半平面可由不等式 $ax+by+c>=0$ 确定。
- 在一个有界区域里半平面或半平面的交是一个凸多边形区域。
- n 个半平面的交是一个至多 n 条边的凸多边形。

半平面交的联机算法

procedure intersection of half-planes

输入： n 个半平面 $H_1, H_2, \ldots H_n$

输出： $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$

初始化区域 A 为整个平面

依次用直线 $a_i x + b_i y + c_i = 0$ ， $i = 1, 2, \ldots n$ 切割 A ，

保留使不等式 $a_i x + b_i y + c_i >= 0$ 成立的部分

输出 A

复杂度 $O(n*n)$ ，联机算法。

半平面交的分治算法

假设可以在 $O(m+n)$ 的时间内将 m 个半平面的交和 n 个半平面的交合并，则可以有一种 $O(n*log(n))$ 的分治算法求半平面的交。

Procedure intersection of half-plane (D&C)

输入： n 个半平面 $H_1,H_2,\ldots H_n$

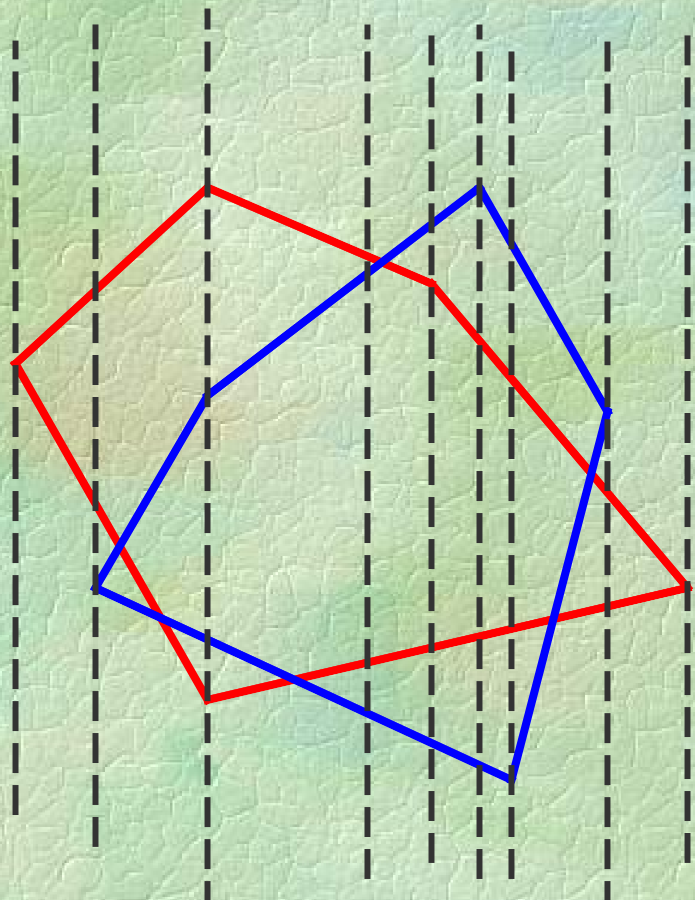
输出： $H_1\cap H_2\cap\ldots\cap H_n$

将 $H_1\ldots H_n$ 分成两个大小近似相等的集合

在每个子问题中递归地计算半平面的交

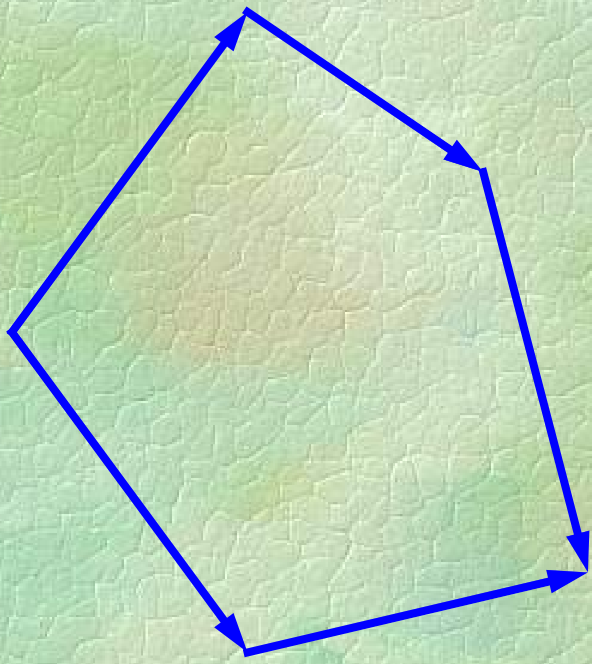
合并两个凸多边形区域形成 $H_1\cap H_2\cap\ldots\cap H_n$

问题的关键是怎样在 $O(m+n)$ 的时间里求两个凸多边形的交。



- 将两个凸多边形沿顶点切割成至多 $O(m+n)$ 个平行于 y 轴的梯形区域
- 每个梯形区域的交可以在 $O(1)$ 时间内解决

描述凸多边形的方法



- 凸多边形上方和下方的顶点分别构成一个 x 坐标递增序列。
- 将这两个序列中的顶点分别作为一个链表存储，得到确定凸多边形区域的上界和下界。

凸多边形交的算法 1：

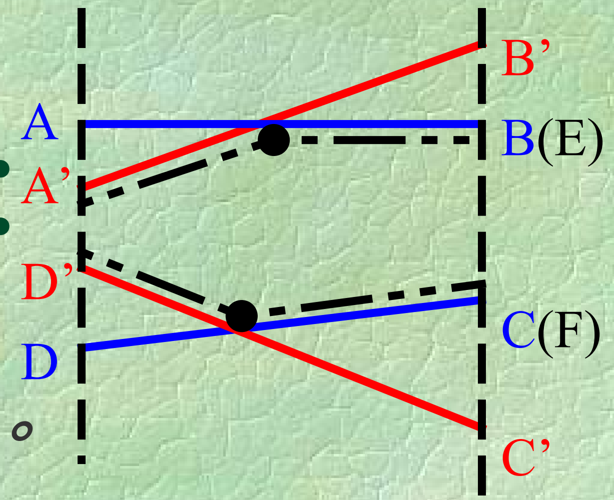
procedure intersection of convex polygon

输入：两个凸多边形区域 A 、 B

输出： $C=A\cap B$

1. 将两个凸多边形的顶点 x 坐标分类，得到序列 $x_i, i=1 \ldots p$
2. 初始化区域 C 为空。
3. 处理 $\{x_1\}$
4. 依次处理区域 $(x_i, x_i+1], i=1 \ldots p-1$ 。
5. 输出 C

凸多边形交的算法 2：



4. 依次处理区域 $(x_i,x_i+1],i=1\ldots p-1$。

4.1 计算两个多边形在此区域里截得的梯形（可能退化）:*ABCD* 和 A'B'C'D'。

4.2 求交点 $AB\cap A'B'$、 $AB\cap C'D'$、 $CD\cap A'B'$，将存在的点按 x 坐标排序，删除重复，添加到 C 的上界中。

4.3 用类似的方法求 C 的下界

4.4 计算此区域的右侧边界（线段的交）： $EF=BC\cap B'C'$。将 E、 F 分别加入到 C 的上界和下界中。

算法的复杂度

- 步 1：由于 A 、 B 的上下界 x 坐标分别有序，可采用归并排序。复杂度 $O(m+n)$
- 步 4：由于是按照 x 递增的顺序扫描这些区域，每条边界上的指针在整个过程中始终向右移动。两个多边形的每个顶点至多扫描一次。复杂度为 $O(m+n)$ 。
- 整个算法的时间复杂度为 $O(m+n)$ 。

问题1

Hotter and Colder

(Waterloo local contest)

A 和 *B* 在 *10*10* 的棋盘上进行一个游戏。*A* 确定一个点 *P*，*B* 每回合移动一次。每次 *A* 都会告诉 *B*，他当前所处的位置是离 *P* 更近了 *(Hot)* 还是更远了 *(Cold)* 。（原题还要考虑距离不变的情况。）

请在 *A* 每次回答后，确定 *P* 点可能存在的区域的面积。

问题 1 分析：

- 假设 B 从 C （ x_1,y_1 ）移动到了 $D(x_2,y_2)$ ， A 回答 *Hot* 。那么 $P(x,y)$ 所处的位置就满足 $|CP|>|DP|$ ，即：

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2>0$$

- 类似地，回答 *Cold* 对应于另一个不等式。
- 初始时可能的区域是 $[0,10]*[0,10]$ 。每回合后都用相应的不等式对应的半平面与当前区域求交。并输出交的面积。

问题 2

Nice Milk

(OOPC1)

$SRbGa$ 有一块凸 n 边形面包，和一盆面积足够大但深度仅为 h 的牛奶。他想仅蘸 k 次（每次都保证面包垂直于盆底），使得面包蘸上牛奶的部分面积最大。

问题 2 分析

- 由于本题规模不大，考虑使用深度优先搜索。
- 蘸每条边都对应剩下的一个半平面，某种蘸 k 条边 $E_1 \ldots E_k$ 的方法，剩下的部分就对应于这 k 个半平面和原多边形的交。
- 考察 $C(n,k)$ 种蘸法，选其中剩下面积最小的那种。

小结

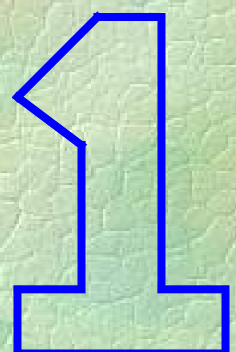
- 问题 1 是用几个半平面顺次求交，并且每次都要输出面积。显然采用联机算法合适。
- 问题 2 如果用联机算法，复杂度为 *O[C(n,k)*n]*，且便于在搜索的过程中剪枝。如果用脱机的分治算法，复杂度为 *O[C(n,k)*(n+k*log(k))]*。

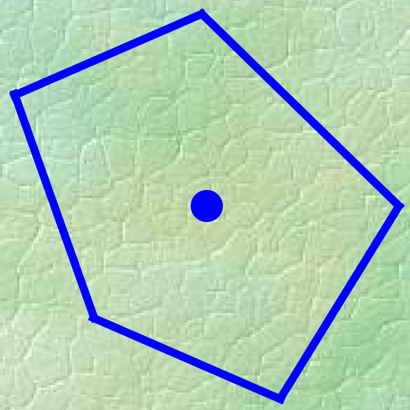
问题 3：

Video

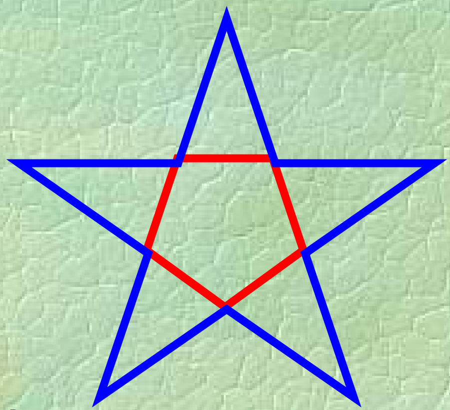
(CTSC98)

已知一个多边形 P（不一定是凸的）问在 P 中是否存在点 Q，在 Q 点能观察到整个多边形区域。





问题 3 分析：



- 若多边形的顶点按逆时针顺序给出 $V_0V_1V_2\ldots V_n$， $V_0=V_n$ 。则能够观察到边 V_iV_{i+1} 的点 Q_i 一定满足

$$\overrightarrow{Q_iV_i} * \overrightarrow{Q_iV_j} \geq 0, i = 0 \ldots n-1$$

- 能观察到所有边的点一定能够观察到整个多边形区域。
- 如果用坐标进行叉积运算，则每个约束条件都对应一个二元一次不等式（也对应于一个半平面）。本题就转化为求这 n 个半平面的交是否不为空。

问题 4：

Triathlon

(NEERC2000)

n 名选手参加铁人三项赛，比赛按照选手在三个赛段中所用的总时间排定名次。已知每名选手在三个项目中的速度 U_i、 V_i、 W_i 。

问对于选手 i ，能否通过适当的安排三个赛段的长度（但每个赛段的长度都不能为 0 ），来保证他获胜。

问题 4 分析

- 假设三个赛段的长度分别为 x 、 y 、 z ，则选手 i 获胜的充要条件就是：

$$\frac{x}{u_i}+\frac{y}{v_i}+\frac{z}{w_i}<\frac{x}{u_j}+\frac{y}{v_j}+\frac{z}{w_j}$$

- 这是一个三元齐次不等式组，由于 $z>0$ ，所以不妨将每个不等式两侧都除以 z, 并令 $X=x/z$ ， $Y=y/z$ ，就得到

$$\left({}^{1}\!/_{u_j}-{}^{1}\!/_{u_i}\right)X+\left({}^{1}\!/_{v_j}-{}^{1}\!/_{v_i}\right)Y+\left({}^{1}\!/_{w_j}+{}^{1}\!/_{w_i}\right)>0$$

- 本题就转化为求这 $n-1$ 个不等式对应的半平面的交，并判断其面积是否大于 0（即排除空集、点、线的情况）。

小结

- 问题 3 和问题 4 ，最终都转化为二元不等式组解的存在性问题。可以用半平面交的分治算法有效地解决。
- 但两个问题又略有不同，一个是 =0 、一个是 >=0 。也就是说对多边形的边界处理不同。 >=0 的不等式要考虑退化为点、线的情况，稍微复杂一点。

问题5：

Run away
（CERC99）

在一个矩形 R 中有 n 个点 $P_1 \ldots P_n$，请找出一个点 $Q \in R$ 使 $min(|QP_i|)$ 最大。

问题 5 分析 1：

- 将 R 分成 n 个区域，$Q_1 \ldots Q_n$，Q_i 是 R 里离 P_i 点的距离比离其它点都小的点的集合：

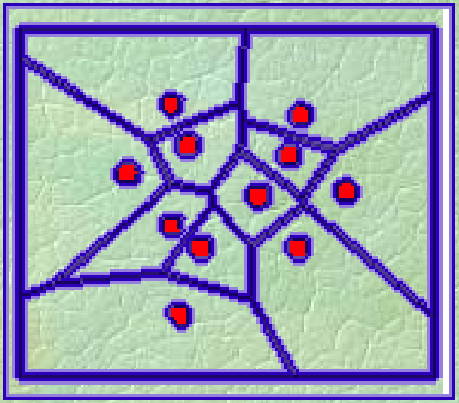
$$Q_i = \left\{ Q \middle| \left| QP_i \right| \le \left| QP_j \right|, i \ne j \right\} \bigcap R$$

- Q_i 可通过在 P_iP_j 的中垂线 P_i 一侧的半平面的交求得。Q_i 为一个凸多边形。
- 在 Q_i 里，离 P_i 最远的点只能出现在 Q_i 的顶点上。求其中最远的点即可。

问题 5 分析 2：

- 半平面的交采用分治算法，每个点的复杂度为 $O(n*log(n))$ 。
- 对应于 P_i 的多边形最多有 $O(n)$ 个顶点，因此求 Q_i 中的最远点复杂度为 $O(n)$ 。
- 总的复杂度为 $O(n*n*log(n))$ 。

Voronoi 图



- 实际上，由以上方法定义的 n 个多边形区域 $Q_1 \ldots Q_n$ 就组成了一个 **Voronoi 图**。
- *Voronoi* 图是计算几何中仅次于凸包的几何对象，有着非常广泛的应用。
- 利用半平面的交求 *Voronoi* 图的算法不是最优的。
- 分治法、平面扫描法等许多算法都能达到 $O(n*log(n))$ 的复杂度，这才是最优的。但这些算法都过于复杂，不属于本文讨论的范围。

半平面交的算法及其应用

- 基本概念
- 算法
  - 半平面交的联机算法
  - 半平面交的分治算法
- 应用
  - 问题1： **Hotter and Colder**
  - 问题2： **Milk**
  - 小结
  - 问题3： **Video**
  - 问题4： **Triathlon**
  - 小结
  - 问题5： **Run away**
    - **Voronoi** 图