Ulam 的游戏和编码

东北育才学校 俞玮

Ulam 的游戏

- 有 n 个数字。
- 其中有一个与其他的不同，是游戏者所选定的。
- 你可以提出“这个数字在集合 X 中吗？”这样的问题。
- 你能收到的答案只有“是”或“否”。
- 可能会有一个错误的回答，但不多于一个。
- 用尽可能少的提问次数求出这个选定的数字。

原型题目及解法

- 同样是 n 个数字，选定一个。
- 问题的方式也是一样。
- 但回答中不包含错误。

- 解答:
  - 使用二分法。log*n* 次提问。
  - 每次把可能为选定数字的那些数字分成尽可能相等的两个部分。
  - 以其中一个部分作为问题中的 X 。
  - 按照回答，去掉不可能为选定数字的数字。
  - 结果为最后剩下的一个数字。

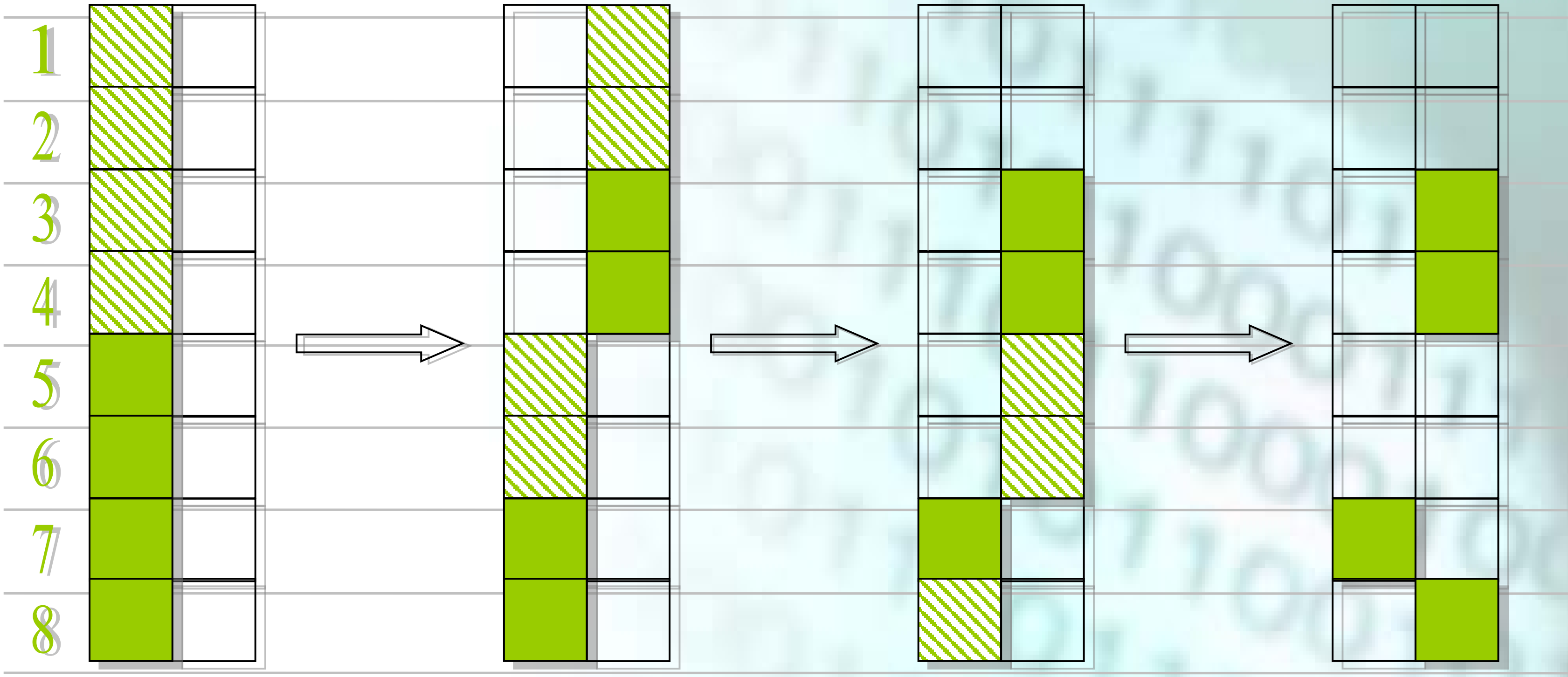
二分法还是筛选法

- 我们的二分法只是一种比较贪心的筛法。
- 让算法在最坏的情况下筛去的数字最多。

二分，按错误分类

- 原理：
  - 平分的不是数量。
  - 平均分的为选定数字的可能性。
  - 两个部分包含选定数字的可能性是相等的。
- 实现：
  - 对于每个数字，找出回答错误几次后，它才可能为选定数字。
  - 按照该次数，对数字进行分类。
  - 每一类中的数字可能为选定数字的可能性都是相等的。
  - 尽可能平均分每一类的数字，并各取一部分作为问题中的 X。

图一：一个操作实例



- 图中的两列分别代表两类，所对应的列上非空白的部分属于该类。阴影部分被判定为不包含选定数字的一部分。

二分法的次数估计

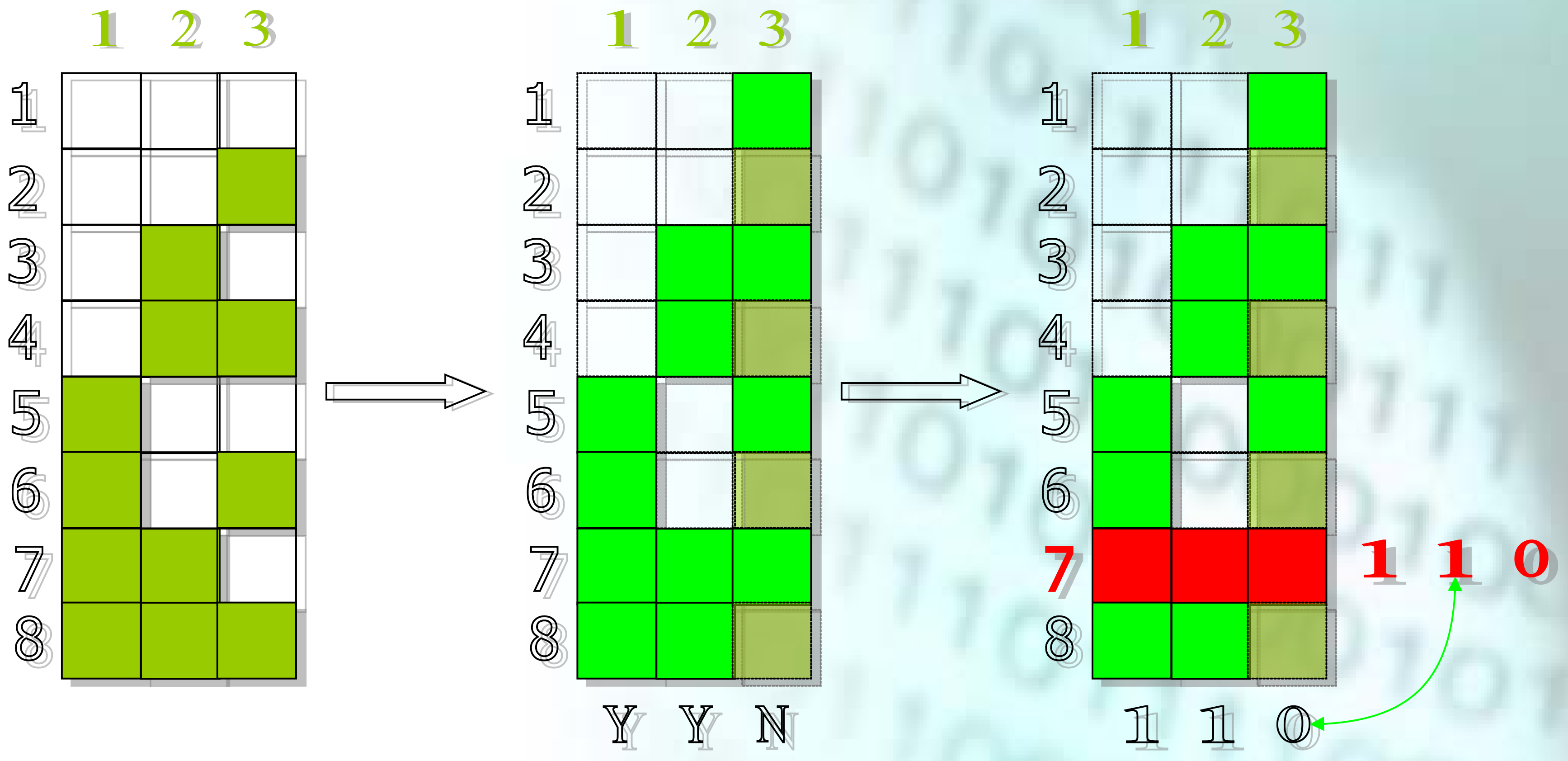
- 第一类中的数字在 k 次提问后的数目:
  - $n/2^k$ 个方格。
- 第二类中的数字在 k 次提问后的数目:
  - 设为 $f(k)$ 。
  - 可知 $f(k)=f(k-1)/2+n/2^k$ 。
  - $f(k)=kn/2^k$ 。
- 当第一二类中的数字只有一个时，即确定了答案:
  - $f(k)+n/2^k\le 1$ 。
  - $2^k\ge kn+n$ 。

新的方法—编码

- 筛选法的限制：
  - 结果的保存。
  - 对上一次结果的依赖。
  - 边界条件的处理。

- 新的编码方法：
  - 为每一数字赋一确定的二进制编码。
  - 第 *i* 个问题⇔编码第 *i* 位为 1 。
  - 结果编码： Y⇔1， N⇔0 。
  - 答案：编码与结果编码一样的数字。

图二：编码的例子



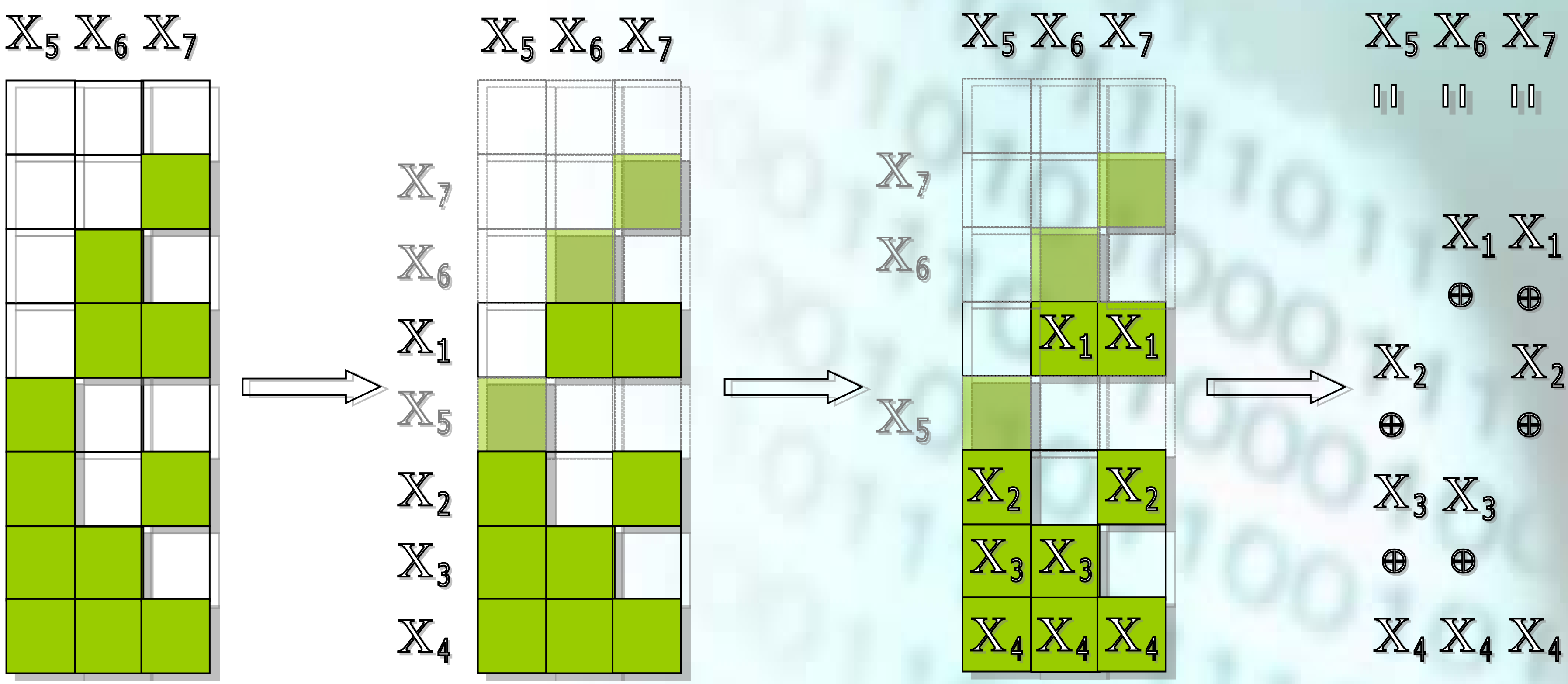
- 对于每次的回答，我们在相应的列中把对应的答案都标记为高亮 。
- 一行均为高亮的数字⇔和结果编码一样的数字。

错误与纠错码

- 错误：
  - m 次回答中有一个错误⇔ n 位编码中有一个错误。
  - 对不同的回答编码⇔对不同的错误编码。

- 纠错码的设计：
  - 使用奇偶校验码，纠错码为其他编码的二进制加法和。
  - 一位编码的错误将会导致所有相关等式的不成立。
  - 假设非纠错码位是正确的，找出“错误”的纠错码位。
    - 如果没有，那么没有错误。
    - 如果只有一个，错误的是纠错码位。
    - 如果有多个，错误的是对应的非纠错码位。

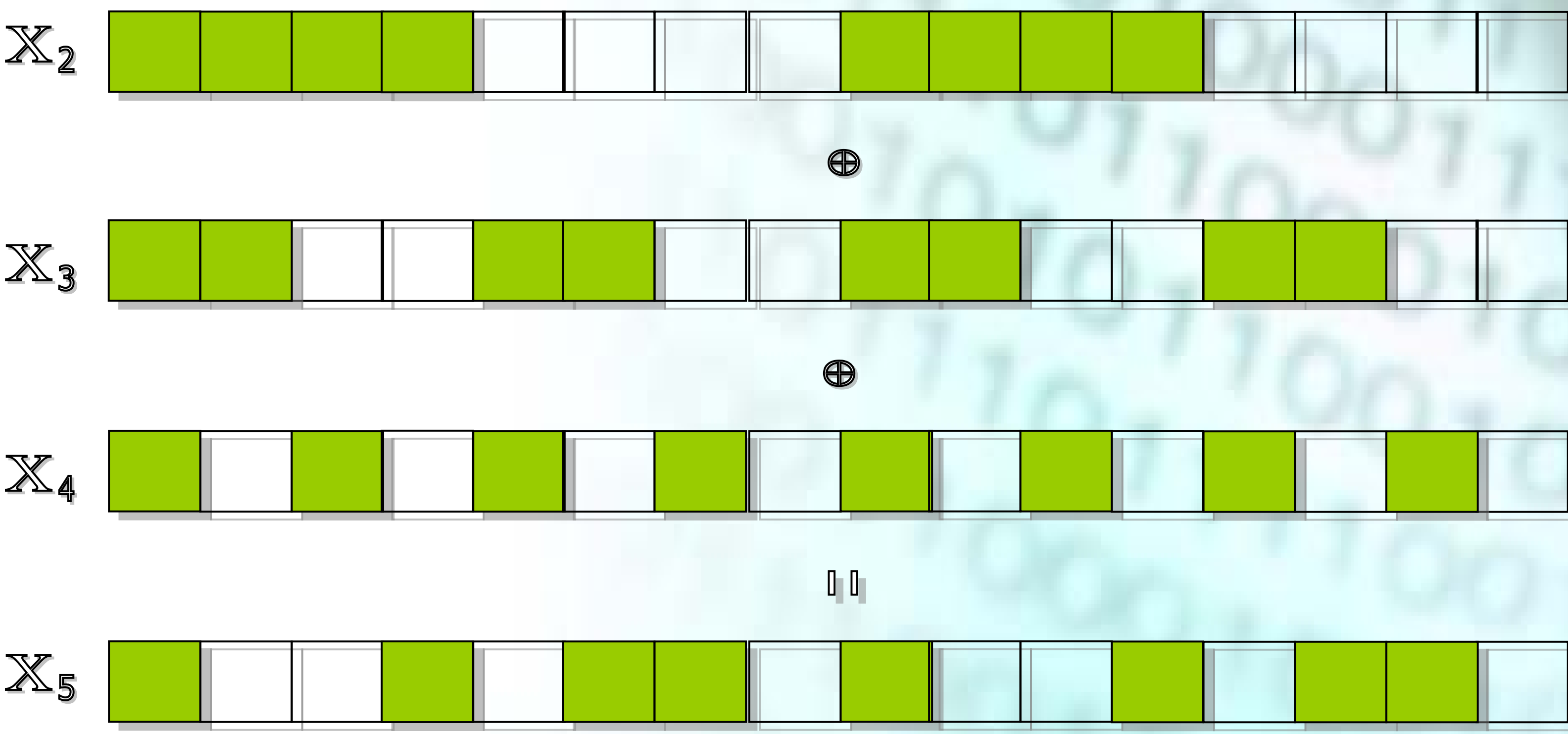
图三：纠错码的构造



- $m=\log n=4$，所以由 $2^k \geq m+k+1$ 知 k 即纠错码的位数至少为 3 。

图四：纠错码与实际问题的对应

- 对编码的异或运算等价于对问题本身的异或。
- 以 $X_5=X_2\oplus X_3\oplus X_4$ 为例。



有关问题次数的一些结果

- 二分法的次数：
  - $2^k \geq kn+n$ 的最小解 k 。
- 编码方法的次数：
  - 除去必需的 m 位有效信息外，每个错误对应一个纠错码：
    - $2^{k-m} \geq k+1$ 。
  - 所有的可能性每个至少对应一个不同的编码：
    - $2^k \geq 2^m(k+1)$ 。
  - 结果：满足不等式 $2^{k-m} \geq k+1$ 的最小解 k 。
- 两者的比较：
  - $m=\log n$， $2^k \geq kn+n \Leftrightarrow 2^k \geq k2^m+2^m \Leftrightarrow 2^{k-m} \geq k+1$ 。

扩展 1：更多错误时的解法

- 在此情况下，编码方法的扩展是很困难的。
- 对于二分法的扩展：
  - 加入更多的分类，最多 k 个错误的时候分为 k+1 类。
  - 平分每一类。

扩展2：更多的回答，称球问题

- 筛选方法需要保存更多的元素
  。

- 编码的方法：
  - 扩展进制数。
  - 设计多进制的纠错码。
  - 称球问题：
    - 三进制。
    - 错误方式也要编码。
    - 三进制纠错码。

Ulam 的游戏和编码

- 多重错误的筛选。
- 编码：
  - 表示方法。
  - 纠错码的设计。
- 更多的扩展。