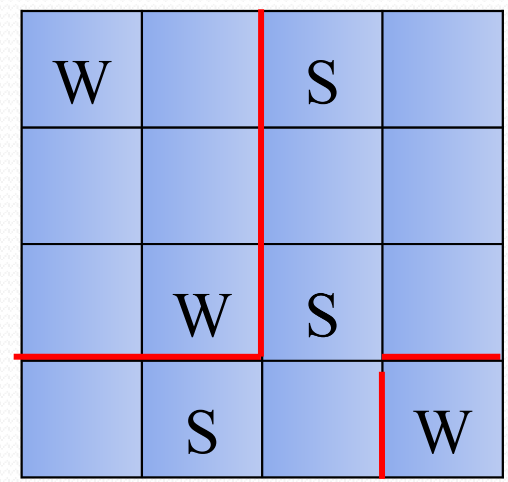
网络流题选讲

清华大学 计 03 李宇亮

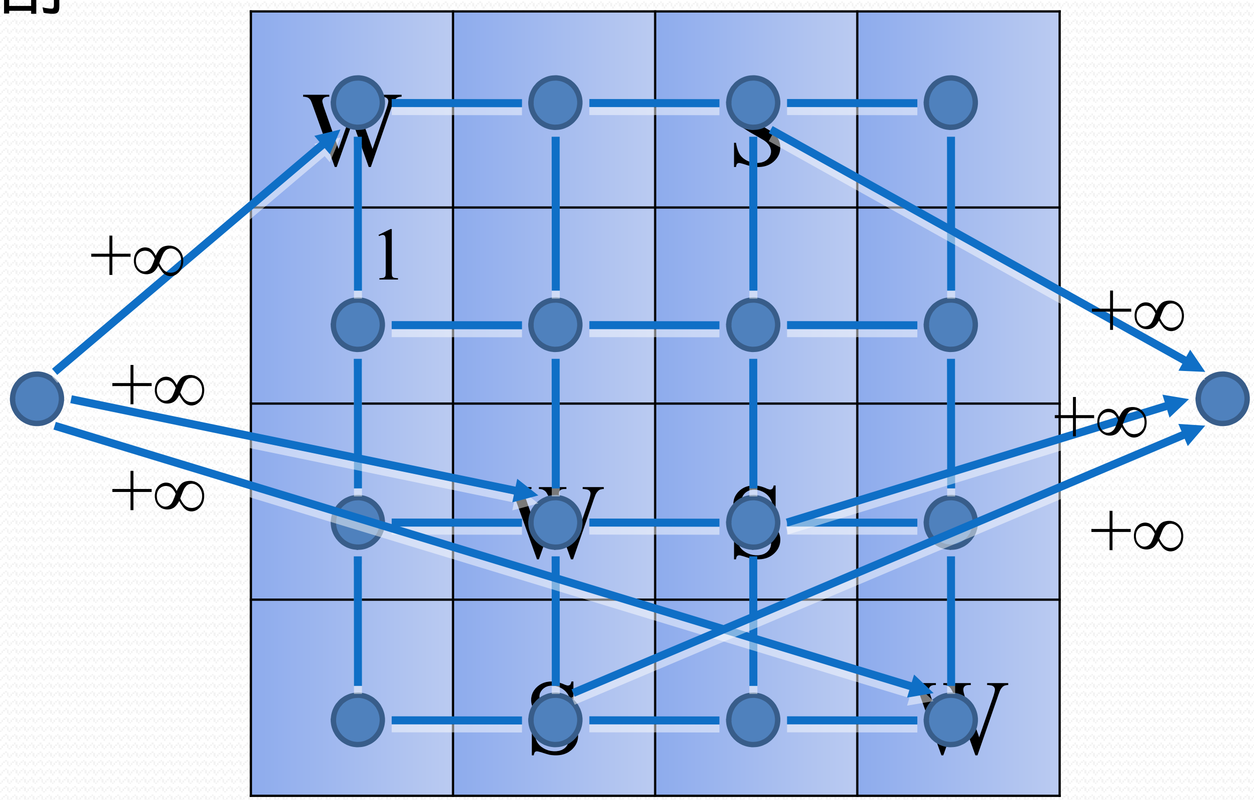
狼和羊的故事

- n*m 的网格
- 每个格子：狼、羊、空
- 要造篱笆，把狼和羊隔开，篱笆只能建在相邻两个格子之间。
- 问最少多少篱笆？



NOI2009 浙江省选题

最小割



Transform Matrix

- 两个 n*m 的 01 矩阵 A 和 B
- 对 A 进行若干次操作，使得 A 变成和 B 一样
- 一次操作：交换 A 中相邻两个位置的元素
- 每个格子 (i,j) 最多被操作 count(i,j) 次
- 问最少操作次数

0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1

0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1

TopCoder srm407 division I level 3

- 先不考虑 count 限制
- 一次操作 ＝ 移动一个 1，代价为 1

- 给定 1 的初始和最终位置，用最少的步数移动
- 对 A 中所有为 1 的点 i，连边 (s,i)，容量为 1，费用为 0
- 对 B 中所有为 1 的点 i，连边 (i,t)，容量为 1，费用为 0
- 相邻的点连边，容量为 $+\infty$，费用为 1

- 考虑 count
- 1、若 $A_{i,j}=B_{i,j}$，必被操作偶数次，移入一次，移出一次。所以点容量为 $count_{i,j}/2$
- 2、若 $A_{i,j}=1$， $B_{i,j}=0$，移出比移入多一次。点容量为 $(count_{i,j}+1)/2$
- 3、若 $A_{i,j}=0$， $B_{i,j}=1$，移入比移出多一次。点容量为 $(count_{i,j}+1)/2$ 。
- 费用为 0

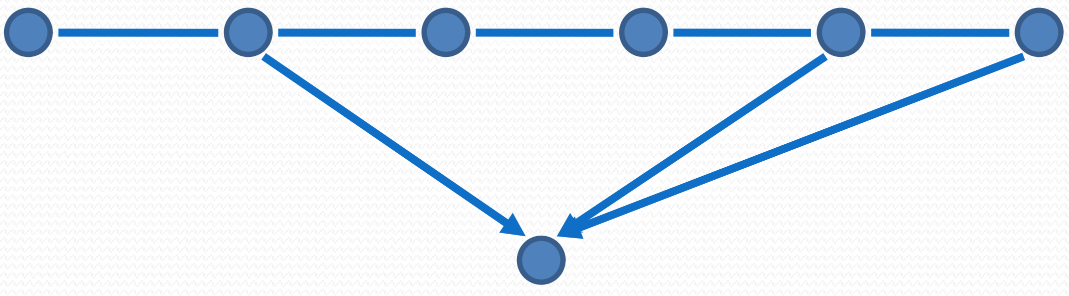
Road

- 数列 h
- 修改，使之满足：相邻项差小于 d
- 总修改代价为 $\Sigma|\Delta h[i]|$

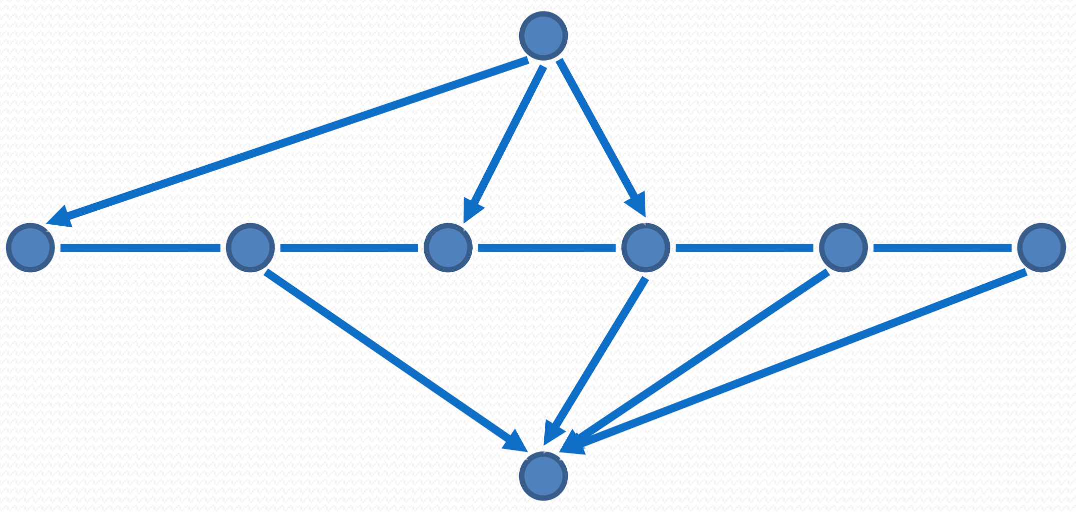
- 有别的算法，但是可以用网络流做

- 令 a[i]=h[i]-h[i+1]
- h[i] 加 1 ㄹㅌ a[i-1] 减 1 且 a[i] 加 1 。
- 将 a 重新分配，使得每个 a 都在 [-d,d] 范围内。
- 每个 a[i] 抽象为点

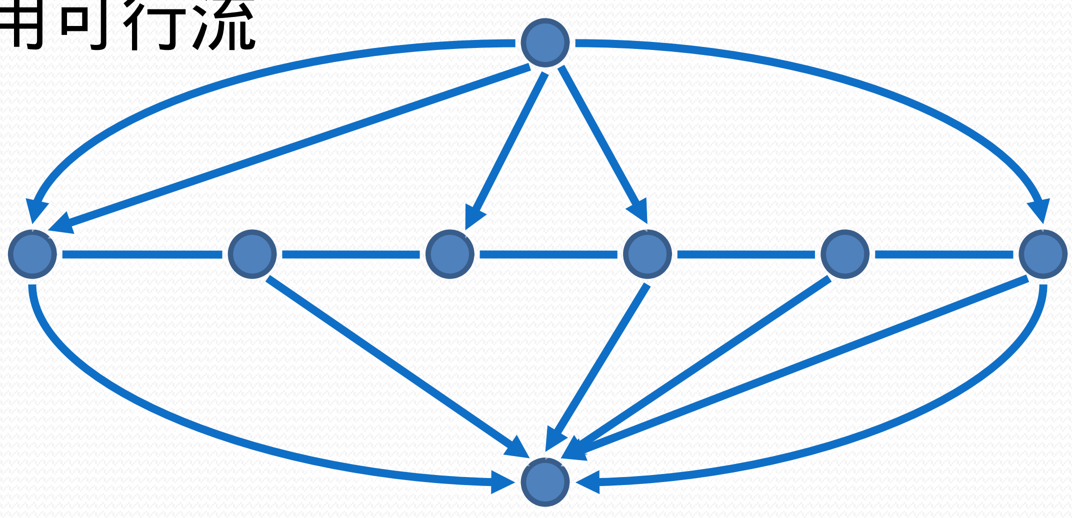
- 相邻点连边，容量$+\infty$，费用1。
- 若$|a[i]|>d$，则至少要从别的地方拿$|a[i]|-d$个1，且不能多于$|a[i]|+d$个1，因此从点i向t连边，容量下界$|a[i]|-d$，上界$|a[i]|+d$，费用0。



- 类似，若$a[i]>d$，则从s向i连边，容量下界为$a[i]-d$，上界$a[i]+d$，费用0
- 若$-d<=a[i]<=d$，则从s向i连边，上界$a[i]+d$，从i向t连边，上界$d-a[i]$，费用均为0



- 特殊情况：修改 h[1](h[n]) 只影响 a[1](a[n-1])，所以 a[1] 和 a[n-1] 会凭空多 1 或少 1
- 凭空多 1，从源点来，从 s 向 1 和 n-1 连边，容量 +∞，费用 1
- 类似，从 1 和 n-1 向 t 连边，容量 +∞，费用 1
- 最小费用可行流



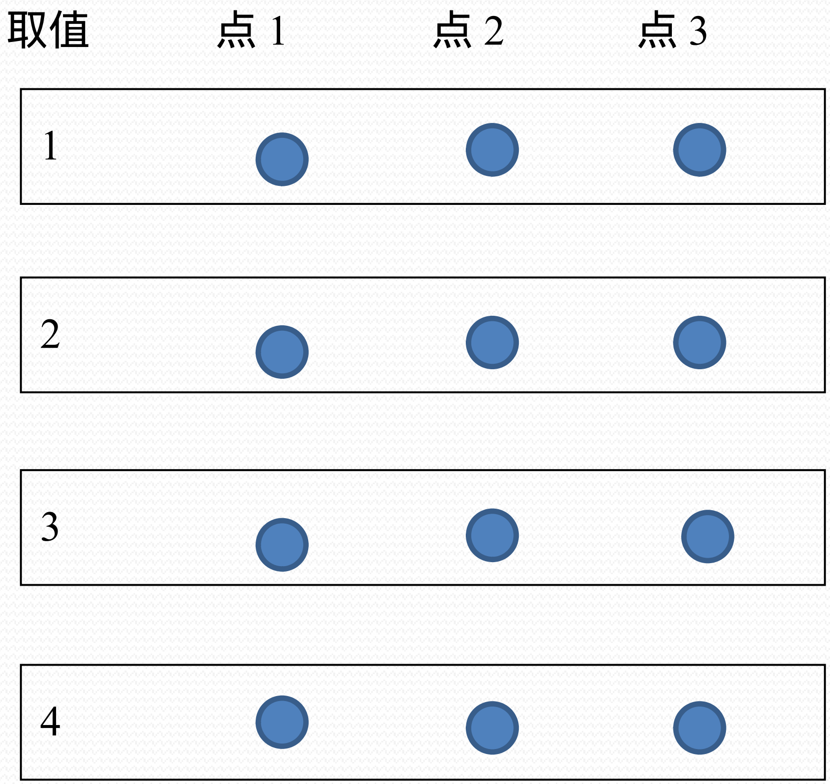
建设乌托乡

- 一张图，有特殊点和一般点
- 每条边的端点中至少一个特殊点
- 每个点有权值 L，特殊点可以修改，代价为 c*|ΔL[i]|
- 边 (i,j) 要计算代价，为 e*|L[i]-L[j]|
- 求 min{c*Σ|ΔL[i]|+e*Σ|L[i]-L[j]|}
- L 只能为 1~20 的整数

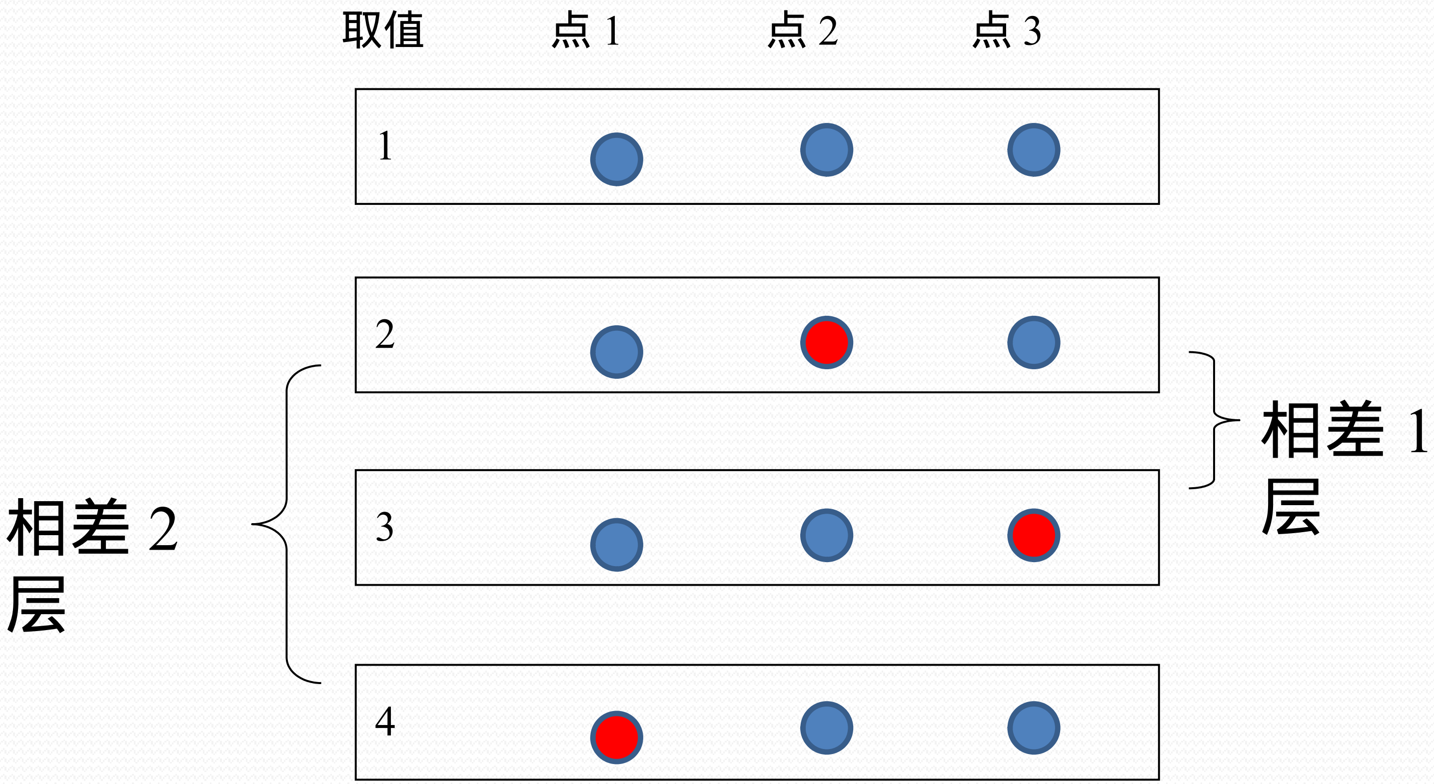
- 先不考虑特殊点与特殊点之间的边
- 那么将特殊点权值从L[i]改为k的总代价为
  - $c * |L[i] - k| + e * \sum|k - L[j]|$
- 只与k有关，以cost[i][k]表示之

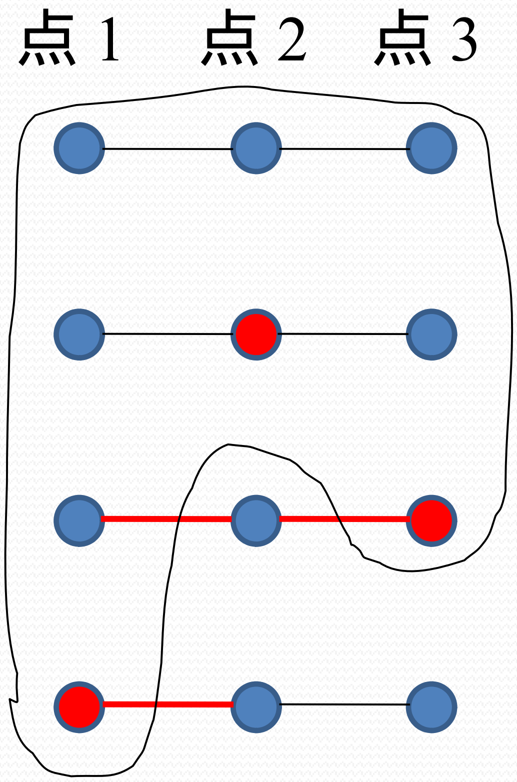
j为一般点，且与i有边

- 再考虑特殊点之间的边
- 简单情况：边 (1,2) 、 (2,3) ，只有 4 种取值

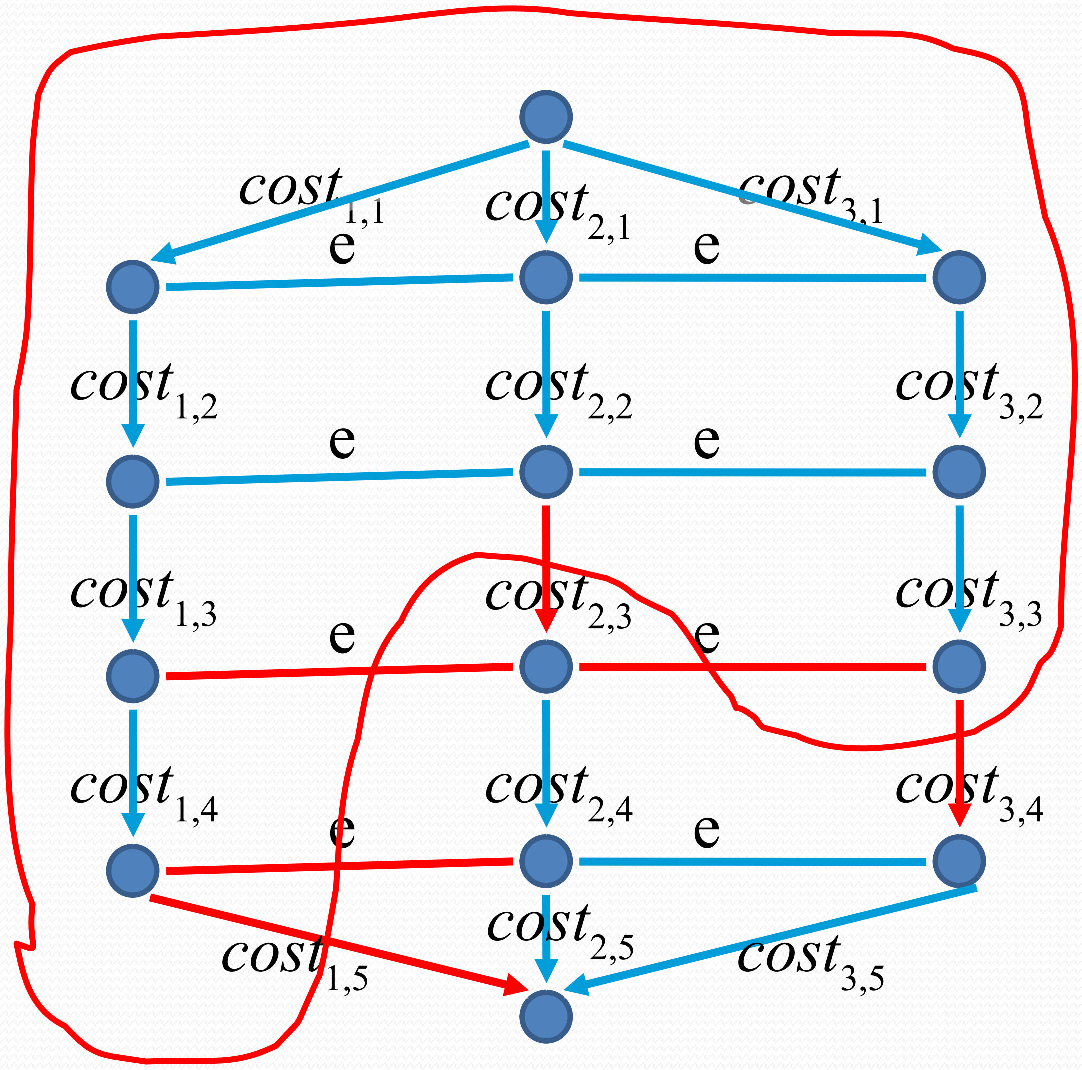


- L[1]’=4， L[2]’=2， L[3]’=3
- 代价： **e*(2+1)**+c*Σcost[i][L[i]’]




点 1
点 2
点 3

- 最小割



$cost_{1,1}$
$cost_{2,1}$
$cost_{3,1}$
e
e
$cost_{1,2}$
$cost_{2,2}$
$cost_{3,2}$
e
e
$cost_{1,3}$
$cost_{2,3}$
$cost_{3,3}$
e
e
$cost_{1,4}$
$cost_{2,4}$
$cost_{3,4}$
e
e
$cost_{1,5}$
$cost_{2,5}$
$cost_{3,5}$

锦标赛

- 单循环，无平局，胜利最多夺冠，已知部分比赛结果
- 问哪些人可能夺冠

- 枚举让谁夺冠，他剩下所有比赛均获胜
- 二分余下选手最多获胜局数 k
- 合理分配每局的胜利方
- 剩下的每局比赛抽象为点，每个选手抽象为点
- 比赛向对应 2 个选手连边，容量 1
- 设选手 i 已获胜 w[i] 局，则 i 向 T 连边容量为 k-w[i]
- S 向比赛点连容量 1 的边

志愿者招募

- N 天
- 第 i 天需要 a[i] 个志愿者
- M 类志愿者，每类人数无限
- 第 i 类从第 s[i] 天工作到第 t[i] 天，费用 c[i]
- 求最小花费

- 3 3
- 2 3 4 //a[i]
- 1 2 2 //[1,2] c=2
- 2 3 5 //[2,3] c=5
- 3 3 2 //[3,3] c=2

- X[1]>=2
- X[1]+X[2]>=3
- X[2]+X[3]>=4

- X[1]>=2
- X[1]+X[2]>=3
- X[2]+X[3]>=4

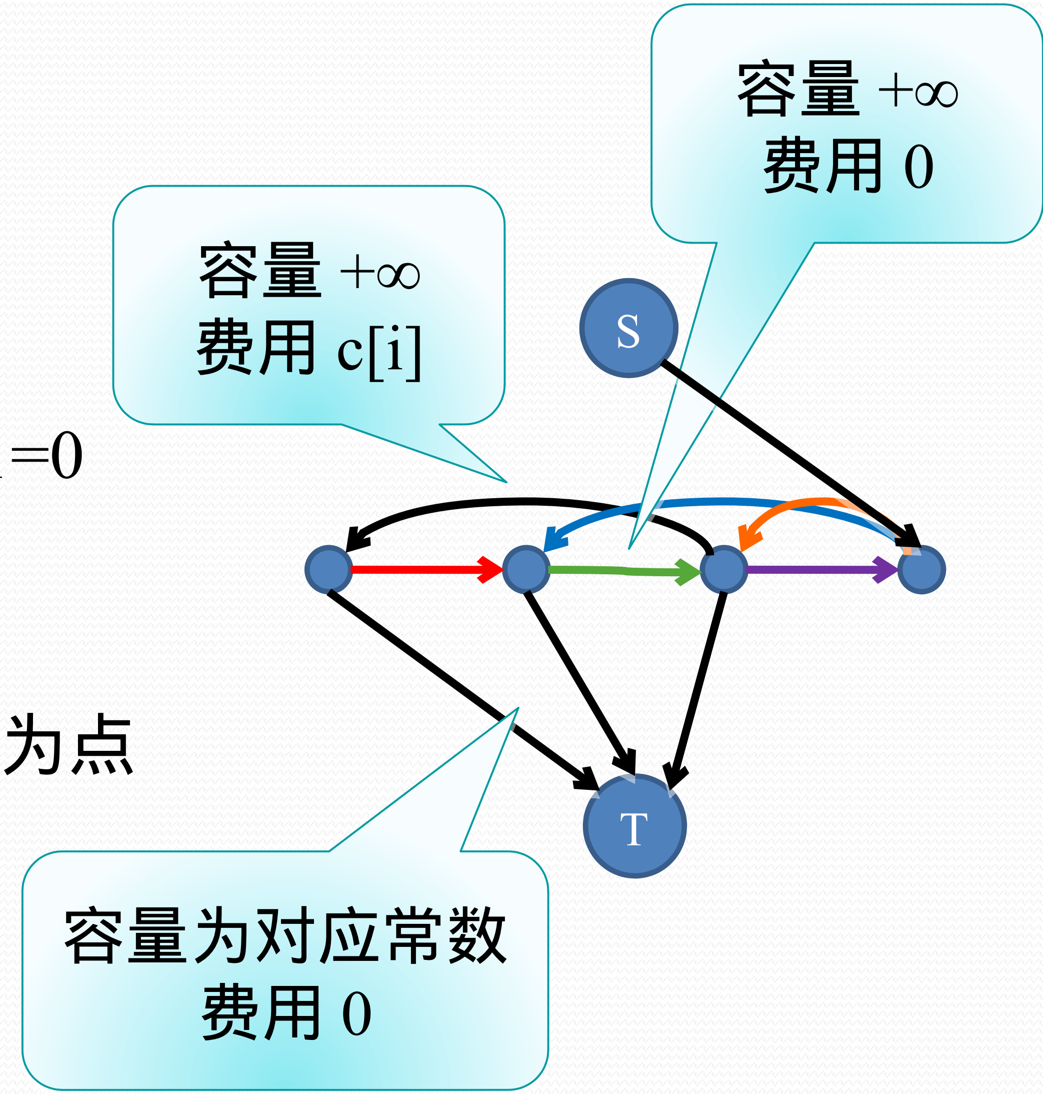
- X[1]-Y[1]-2=0
- X[1]+X[2]-Y[2]-3=0
- X[2]+X[3]-Y[3]-4=0

- X[1]-Y[1]-2=0
- X[1]+X[2]-Y[2]-3=0
- X[2]+X[3]-Y[3]-4=0
- 0=0

- X[1]-Y[1]-2=0
- Y[1]+X[2]-Y[2]-1=0
- -X[1]+Y[2]+X[3]-Y[3]-1=0
- -X[2]-X[3]+Y[3]+4=0

- X[1]-Y[1]-2=0
- Y[1]+X[2]-Y[2]-1=0
- -X[1]+Y[2]+X[3]-Y[3]-1=0
- -X[2]-X[3]+Y[3]+4=0
- 每个 X、 Y 只出现 2 次，且正负各一次
- 从一个点流出，一个点流入

- X[1]-Y[1]-2=0
- Y[1]+X[2]-Y[2]-1=0
- -X[1]+Y[2]+X[3]-Y[3]-1=0
- -X[2]-X[3]+Y[3]+4=0
- X、 Y 抽象为边
- 等式为流量平衡，抽象为点
- 求最小费用最大流



最长 k 可重区间

- N 个开区间
- 取若干个，使得没有超过 k 个区间覆盖同一点
- 问：取得的区间长度和的最大值

- 考虑用流量限制为 k 的最大费用最大流来做
- 先离散化
- 每个端点建立一个结点，并增加 S 和 T